

$$f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad x \rightarrow (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

$$\text{con } f_i(x): E \rightarrow \mathbb{R}$$

f è continua in x_0 se e solo se
sono continue tutte le $f_i(x)$

Per questo studiamo principalmente
funzioni $E \rightarrow \mathbb{R}$

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 (pto d'accum.)

$$\textcircled{1} \quad \forall \varepsilon \quad \exists \delta: x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

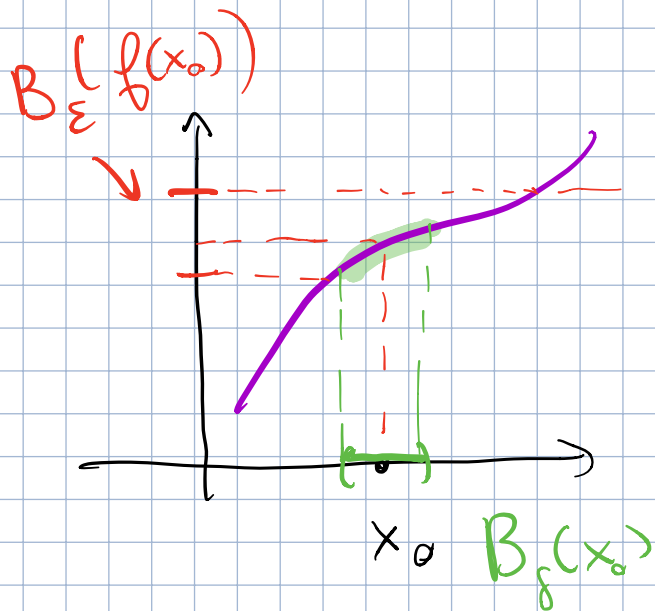
$$\text{cioè} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\textcircled{2} \quad \forall \{x^{(k)}\} \subset E \quad \text{t.c.} \quad x^{(k)} \xrightarrow{\text{n'ha}} x_0 \quad \forall \quad f(x^{(k)}) \rightarrow f(x_0)$$

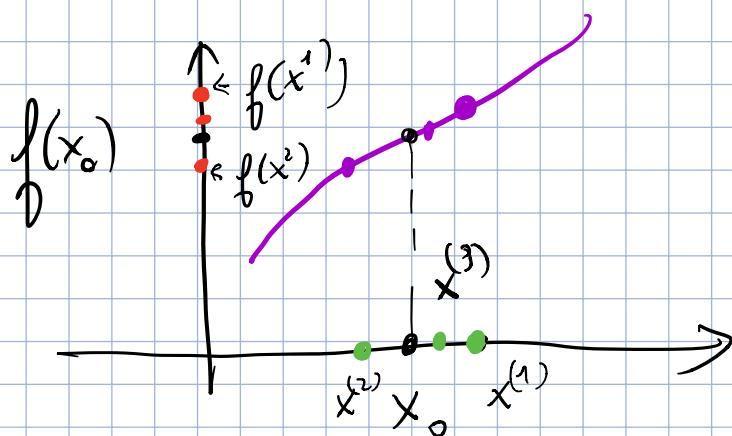
$$\textcircled{3} \quad \forall \text{ curve continue } \varphi: [-1, 1] \rightarrow E$$

$$\text{t.c.} \quad \varphi(0) = x_0 \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$$

① - ② - ③ sono equivalenti

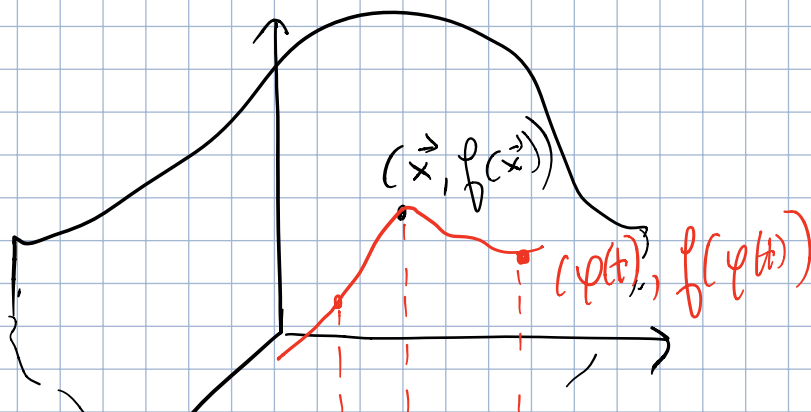


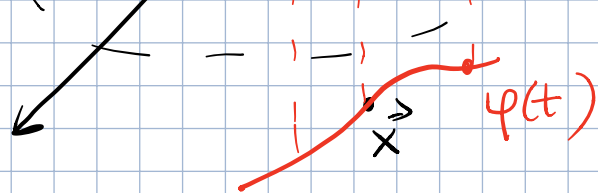
①



②

③ Non si vede su $\mathbb{R}$



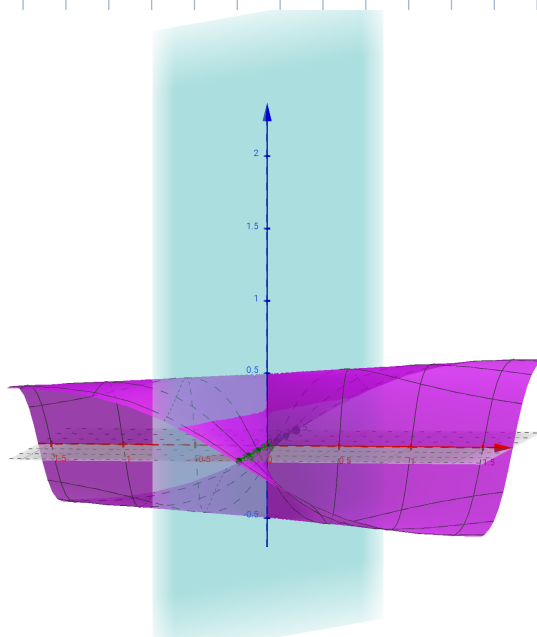


Proviamo di nuovo $\frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$\varphi: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \rightsquigarrow f(\varphi(t)) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = mt \end{cases} \rightsquigarrow f(\varphi(t)) = \frac{m}{1+m^2}$$

Disegno in geogebra



Altro esempio

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{y x^2}{y^2 + x^4} \\ 0 \end{cases}$$

$$x(x,y) \neq (0,0)$$

$$x(x,y) = (0,0)$$

$$\varphi: \begin{cases} y = t^2 \\ x = t \end{cases}$$

$$f(t, t^2) = \frac{t^2 \cdot t^2}{2(t^4)} = \frac{1}{2}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{y x^3}{x^4 + y^6} \\ 0 \end{cases}$$

$$\varphi: \begin{cases} x = \end{cases}$$

Pero se proviamo

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 x^2}{y^2 + x^4} \\ 0 \end{cases}$$

NON riusciremmo a trovare nessuna
curve!

f_3 è continua in $(0,0)$!

IL TEOREMA dei CARABINIERI

$$\text{Sia } h: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$k: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

e x_0 sia un pto d' accumulazione
per tutte e tre t.c. $\exists r > 0$ e

$$h(x) \leq f(x) \leq k(x) \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k(x) = L \text{ allora}$$

$$\text{esiste } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Nel nostro caso $\vec{x}_0 = (0,0)$

$$0 \leq \frac{y^2 x^2}{y^2 + x^4} \leq x^2$$

$\downarrow$
0

!

l'idea per dimostrare che f non è
continua in un punto
è di rendere il denominatore piccolo
il più possibile.

Altre classi di esempi
il denominatore si annulla
lungo una curva

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^6 y^3}{x-y} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{array} \right.$$

Se $x \neq y$ la funzione è sicuramente
continua. (Rapporto di funzioni
continue con denominatore $\neq 0$)

Studiamo la continuità in (x_0, y_0)
con $x_0 \neq 0$. a tale fine

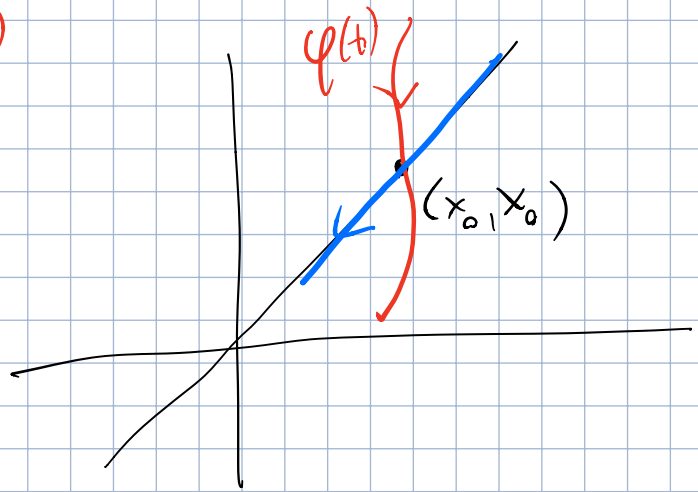
verifichiamo se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) \stackrel{?}{=} 0$

o se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} x^6 y^3 = x_0^6 y_0^3 \neq 0$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} x - y = 0$ quindi

RETT. limite del rapporto $\Rightarrow$ rapporto dei
limiti se non si ottiene una
forma indeterminata)

se mi avvicino a (x_0, x_0) lungo
un percorso $\varphi(t)$
come in figure



che $\frac{1}{0}$

(quindi il lim
destro $\bar{x} \rightarrow \infty$

e quello sinistro $-\infty$ o v.v.)

Ovviamente lungo il percorso blu

$f(\varphi(t)) = 0$ quindi anche il limite
 $= 0$.

Se $x_0 = 0$ questo ragionamento
NON funziona (infatti ho
una forma indeterminata $\frac{0}{0}$!)

Seguo il principio di costruire
una curva lungo la quale
il denominatore $\bar{x}$ MOLTO PICCOLO

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^6 y^3}{x-y} \\ 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \neq y \\ x = y \end{array}$$

prendo per esempio.

$$\varphi: \begin{cases} x = t \\ y = t - t^{10} \end{cases}$$

se ignoro il termine in blu
mi muovo lungo la retta $y = x$

il valore di t φ percorre la
curva $y = x - x^{10}$ che è tangente
(e vicina) alla retta $y - x = 0$
in cui si annulla il denominatore
quindi il denominatore è

no LTO PICCOLO

$$f(\varphi(t)) = \frac{t^6 (t - t^{10})^3}{t - (t - t^{10})} = \frac{t^9 (1 + t^9)^3}{t^{10}}$$

quindi $N \sim t^3$ $D \sim t^{10}$

il limite NON esiste!

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{18} y^7}{x + y^2} & \text{se } x \neq -y^2 \\ 0 & \text{se } x = -y^2 \end{cases}$$

$$\varphi: \begin{cases} x = -t^2 + t^{100} \\ y = t \end{cases}$$

$$f(\varphi(t)) = \frac{(t^2 + t^{100})^{18} t^7}{t^{100}} = \frac{t^{36+7} (1 + t^{98})}{t^{100}}$$

IL LIMITE NON ESISTE !

ESEMPIO:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(mx)^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & x \cdot y \neq 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{cases}$$

Um pouco mais difícil

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} \\ 0 \end{cases}$$

use:

$$0 \leq (|x| - y^2)^2 = x^2 + y^4 - 2|x|y^2$$

$$\begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^4} \\ 0 \end{cases}$$

allora: $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$

cosa succede con:

$$\begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \end{cases}$$

Esercizio: sia $\|\cdot\|$ una norma su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $f(x) := \|x\|$ è continua (rispetto alla norma euclidea)

$$\forall \varepsilon, x_0 \quad \exists \delta : \text{se } |x - x_0| < \delta$$

$$\text{allora } |f(x) - f(x_0)| = |\|x\| - \|x_0\|| < \varepsilon$$

$$\text{Nota che } \|x - x_0\| \geq |\|x\| - \|x_0\||$$

(per la disuguaglianza triangolare)

$$\left[\begin{array}{ll} \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| & \Rightarrow \\ \|a+b\| - \|a\| \leq \|b\| & \text{applico con} \\ & b = x - x_0 \\ & a = x_0 \end{array} \right]$$

quindi se $|x - x_0| < \delta$ ricordando

che $x = \sum x_i \underline{e}_i$ ho che

$$\|x - x_0\| = \left\| \sum (x_i - x_{i0}) \underline{e}_i \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|(x_i - x_{i0}) \underline{e}_i\|$$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i0}| \|\underline{e}_i\|$$

$$\leq |x - x_0|_\infty \sum_{i=1}^n \|\underline{e}_i\|$$

$$= |x - x_0|_\infty C$$

$$\leq \|x - x_0\| C$$

$$\leq \delta C$$

e prendi

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \|x - x_0\|$$

$$\leq \delta C$$

besta prendere $\varepsilon = \delta C$ $\square$