I compatti:

I ricoprimenti.

Dato un insieme $K \subset E$
(spazio topologico)

una famiglia di aperti $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$
(I è l'insieme degli indici che può
essere finito - numerabile o + che num)

$\{A_\alpha\}$ è un RICOPRIMENTO per E

se $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \supseteq K$.

Se esiste $I' \subset I$ t.c.

$\bigcup_{\alpha \in I'} A_\alpha \supseteq K$ dico che $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I'}$

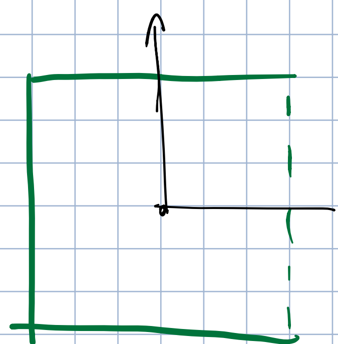
è un sottoricoprimento.

Definizione (compatto per RICOPRIMENTI)

K è compatto se

DA OGNI ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito (cioè I' è UN INSIEME finito)

Esempio



$-1 \leq x < 1$

$-1 \leq y \leq 1$

NON è compatto per ricoprimenti

$$A_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < y < 2 ; \ -2 < x < 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

è un ricoprimento!

NON si può estrarre un ricopr. finito

Esercizio mostrare che

$B := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \}$

NON è compatto per ricoprimenti

5 Compattezza

Un insieme K si dice **compatto** se da ogni ricoprimento di aperti si può estrarre un sottoricoprimento finito ovvero, in formule,

$$\text{(a)}\quad K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\ , \quad E_\alpha \text{ aperto} \implies \exists\ \alpha_1, ..., \alpha_k \in A :\ K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} E_{\alpha_i}\ ;$$

qui A è un insieme arbitrario (e quindi non necessariamente numerabile) di indici.

Siano, ora, (b) e (c) le seguenti proprietà:

(b) ogni successione in K ammette una sottosuccessione convergente in K;

(c) K è chiuso e limitato.

Si ricorda che un insieme si dice limitato se esiste una sfera che lo contiene; la (b) viene a volte chiamata "compattezza per successioni".

Teorema 1.16 (Bolzano, Borel, Heine, Pìncherle, Weierstrass)
Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Allora le proprietà (a), (b) *e* (c) *sopra elencate sono equivalenti.*

La più facile è $(c) \Rightarrow (b)$

continua):

Proposizione 1.17 *Se E è compatto e f è continua su E allora $f(E)$ è compatto.*

Dimostrazione Sia $\{y^{(k)}\}$ una successione in $f(E)$: ovvero esistono $x^{(k)} \in E$ tali che $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$. Per la compattezza di E e per il Teorema 1.16, esiste $x^{(k_j)} \to \bar{x} \in E$. Segue allora che $y^{(k_j)} = f(x^{(k_j)}) \to f(\bar{x}) := \bar{y} \in f(E)$ il che (sempre per il Teorema 1.16) significa che $f(E)$ è compatto. ∎

Teorema 1.18 (Teorema di Weierstrass) *Sia E un insieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua su E. Allora f assume massimo e minimo in E.*

N.B f continua $\Rightarrow$

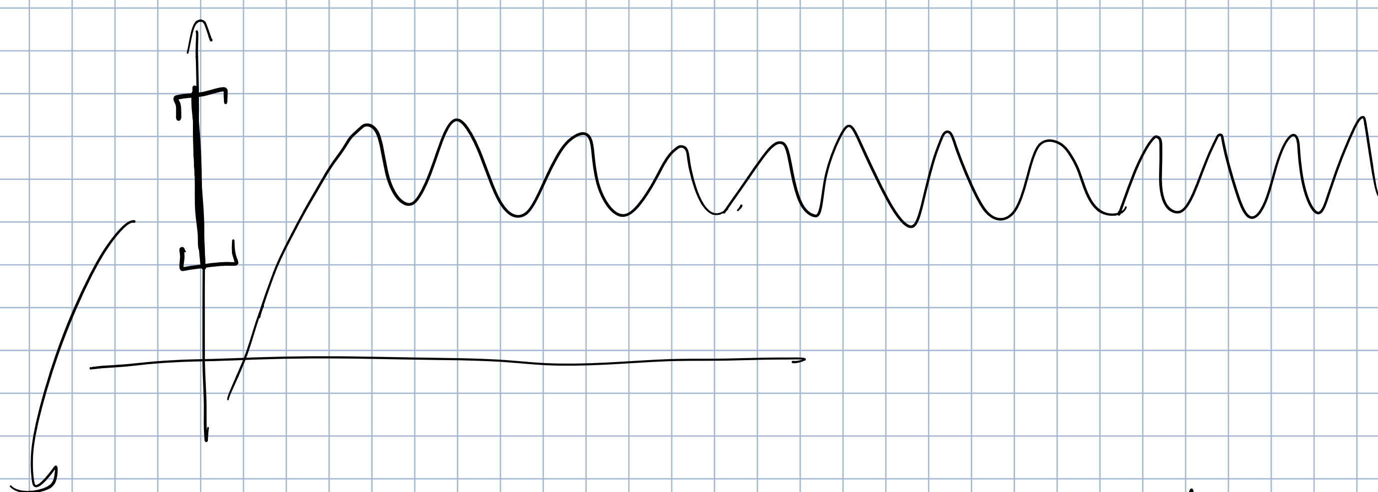
- la controimmagine di un aperto è aperto
- la controimmagine di un chiuso è chiuso
- e' IMMAGINE di un compatto è compatto

<u>Esercizio:</u>

Dimostrare che

$$C := \{ (x,y) : 4x^2 + y^2 = 1 \}$$

è un compatto.



la preimmagine di un compatto

NON è in generale un compatto

Definizione 1.19 *Una funzione* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *si dice* **uniformemente continua su** E *se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ tale che } \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ , \quad \forall\ x, y \in E \text{ con } |x - y| < \delta\ . \tag{1.27}$$

Teorema 1.20 (Teorema di Heine–Cantor) *Sia* E *un insieme compatto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *una funzione continua su* E*. Allora* f *è uniformemente continua su* E*.*

Dimostrazione Procediamo per assurdo usando la caratterizzazione (b) usata nel Teorema 1.16. La negazione di uniforme continuità si legge:

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall\ \delta > 0\ \exists\ x, y \text{ con } |x - y| < \delta \text{ tali che } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\ , \tag{1.28}$$

(naturalmente x e y dipendono da ε e δ e quest'ultimo è arbitrario). Se scegliamo $\delta = \frac{1}{k}$, otteniamo che esistono $\{x^{(k)}\}$ e $\{y^{(k)}\}$ tali che $|x^{(k)} - y^{(k)}| < \frac{1}{k}$ e $|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| \geq \varepsilon$. Poiché E è compatto possiamo[22] estrarre $\{x^{(k_j)}\}$ e $\{y^{(k_j)}\}$ convergenti in E, e poiché $|x^{(k_j)} - y^{(k_j)}| <$ $\frac{1}{k_j}$, segue che esiste un unico $z \in E$ tale che $z = \lim_{j\to\infty} x^{(k_j)} = \lim_{j\to\infty} y^{(k_j)}$. Allora $\lim |f(x^{(k_j)}) - f(y^{(k_j)})| = |f(z) - f(z)| = 0$ (per la continuità di f) e questo contraddice il fatto che $|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| \geq \varepsilon$ per ogni k. ∎

Prop: ② $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$

$$\Updownarrow$$

① $\lim_{r\to 0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - L| = 0$

Dim: da ① so che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 1$

t.c. se $0 \le r < \delta$ allora

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi)} | f(r\cos\theta, r\sin\theta) - L| < \varepsilon$$

cioè $\forall \theta \quad | f(r\cos\theta, r\sin\theta) - L| < \varepsilon$

ora per dimostrare lo lim $\forall \varepsilon > 0$

prendo lo stesso $\delta(\varepsilon)$ di ①

se $|(x,y)| < \delta \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

allora $x = r_0\cos\theta_0$ per $0 \le r_0 < \delta$ e
$y = r_0\sin\theta_0$ $\theta_0 \in [0,2\pi]$

quindi $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ ∎

Per vedere l'implicazione opposta è + difficile!

Se Non è vero che

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_\theta \left| f(r\cos\theta, r\sin\theta) - L \right| = 0$$

allora $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall\, \delta > 0$ $\exists\, 0 < r_\delta < \delta$

tale che

$$\sup_\theta \left| f(r_\delta \cos\theta, r_\delta \sin\theta) - L \right| > \varepsilon_0$$

prendiamo la successione $\delta_k = \frac{1}{k}$

e se $r_k = r_{\delta_k}$ il raggio

corrispondente. ($r_k \to 0$ per $k \to \infty$)

per definizione di sup per ogni k

$\exists\, \theta_k \in [0, 2\pi)$: $\left| f(r_k \cos\theta_k, r_k \sin\theta_k) - L \right| > \frac{\varepsilon_0}{2}$

ma ponendo $(x_k, y_k) = (r_k \cos\theta_k, r_k \sin\theta_k)$

ho che $(x_k, y_k) \longrightarrow (0,0)$

ma $f(x_k, y_k) \not\longrightarrow L$ $\blacksquare$

Esercizio: sia $\|\cdot\|$ una norma su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $f(x) := \|x\|$ è continua (rispetto alla norma euclidea)

$\forall\, \varepsilon, x_0 \quad \exists\, \delta \; : \;$ se $|x - x_0| < \delta$

allora $|f(x) - f(x_0)| = \big|\, \|x\| - \|x_0\| \,\big| < \varepsilon$

Noto che $\quad \|x - x_0\| \geq \big|\, \|x\| - \|x_0\| \,\big|$

(per la disuguaglianza triangolare)

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \implies$$

applico con

$$\|a + b\| - \|a\| \leq \|b\|$$

$b = x - x_0$

$a = x_0$

quindi se $|x - x_0| < \delta$ ricordando che $x = \sum x_i \underline{e}_i$ ho che

$$\|x - x_0\| = \left\|\sum (x_i - x_{i0})\, \underline{e}_i\right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|(x_i - x_{i0})\, \underline{e}_i\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i0}|\, \|e_i\|$$

$$\leq |x - x_0|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$$

$$= |x - x_0|_\infty\, C$$

$$\leq |x - x_0|\, C$$

$$\leq \delta C$$

e quindi

$$|f(x) - f(x_0)| = \big|\, \|x\| - \|x_0\| \,\big| \leq \|x - x_0\|$$

$\leq \delta C$

basta prendere $\varepsilon = \delta C$ $\blacksquare$