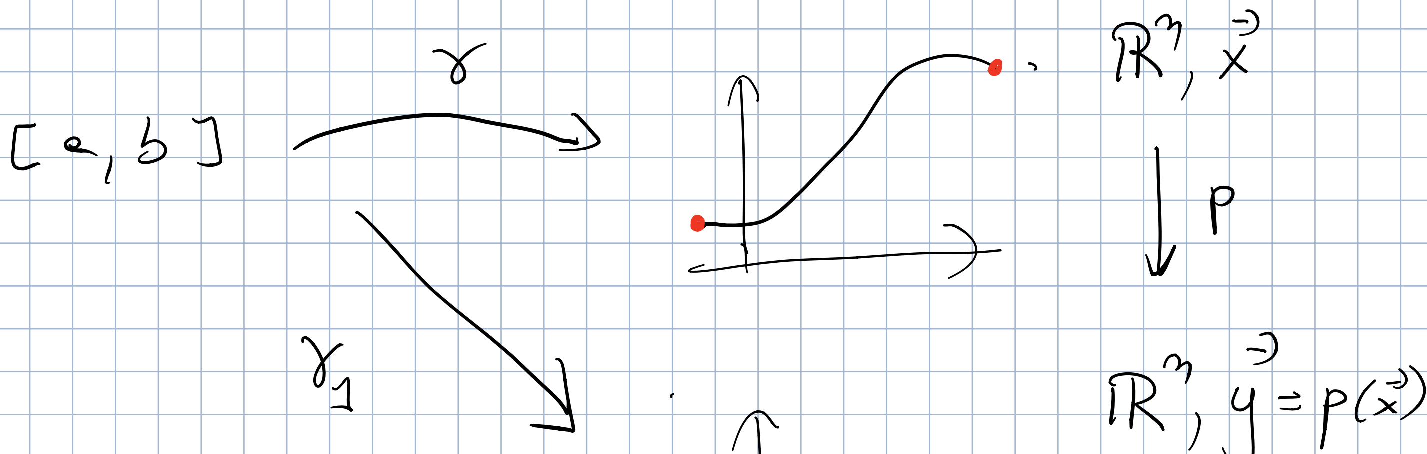
$\boxed{\text{Cambiamenti di coordinate e Lavoro}}$

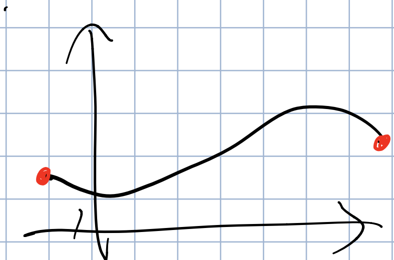
Sia γ una curva regolare

$$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^3$$
$$t \to (\vec{x}(t))$$

ovviamente sto considerandolo UNA PARTICOLARE base per $\mathbb{R}^3$

cosa succede se cambio le coordinate?





$$\vec{y}(t) = p(\vec{x}(t))$$

ora immagino di avere un c.v. $\vec{F}$

nelle variabili $\vec{x}$ di cui voglio calcolare

il lavoro lungo γ

$$\int_\gamma F \cdot \hat{v} \, dl = \int_a F(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}(t) \, dt$$

voglio trovare F_1 (c.v. nelle variabili y) in modo che

$\downarrow$ nelle y

$$\int_{\gamma_1} F_1 \cdot \hat{v} \, dl = \int_\gamma F \cdot \hat{v} \, dl$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$\int_a^b F_1(y(t)) \cdot \vec{y}'(t) \, dt = \int_a^b F(x(t)) \cdot \vec{x}'(t) \, dt$$

$$\vec{y}(t) = p(x(t)) \Rightarrow y_i' = \sum_J \frac{\partial (p)_i}{\partial x_J} x_J'$$

$$\vec{y}' = (Jp) \, \vec{x}'$$

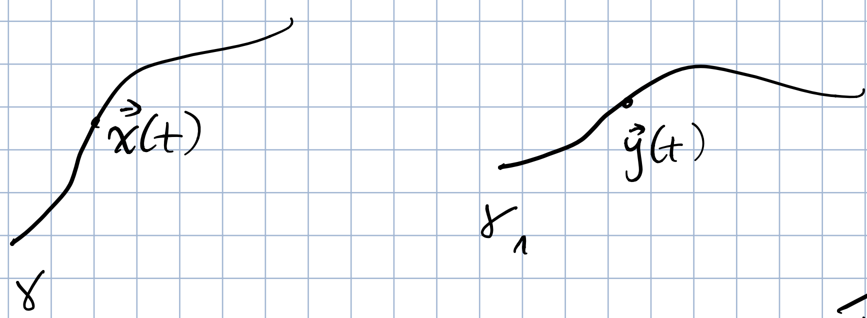
$$\int_a^b F_1(p(x(t))) \cdot \left[(Jp) \, x' \right] dt = \int_a^b F(x(t)) \cdot \vec{x}'(t) \, dt$$

$$\parallel$$

$$\int_a^b (J_p)^T F_1(p(x(t))) \cdot x' \, dt$$

$$F_1(y) = (J_p)^{-T} F(p^{-1}(y))$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n, x \arrow[r, "p"] & \mathbb{R}^n, y = p(x) \arrow[l, bend right, "p^{-1}"'] \end{tikzcd}$$



$$F_1(y) = (J_p)^{-T} F(x \quad) \qquad (x = p^{-1}(y))$$

in particolare se $p(x)$ è una mappa lineare $y = Ax$ $\quad J_p = A$

$y = Ax$ e $F_1(y) = A^{-T} F(x)$

quindi se vogliamo preservare il lavoro $F(x)$ deve variare secondo le regole di $(\mathbb{R}^n)^*$

RICORDIAMO cos'è $(\mathbb{R}^n)^*$ e quali sono le leggi di variazione per cambiamenti di base. Partiamo da uno spazio vettoriale

$$V \xrightarrow{\text{introduciamo una base}} \underline{e}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{W} = \sum x_i \, \underline{e}_i$$

il duale V^* è lo spazio delle funzioni lineari

$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$W \longrightarrow \ell[W]$$

per linearità

$$L[W] = \sum x_i \, L[\underline{e}_i]$$ quindi definendo

$$L_i = L[\underline{e}_i]$$ posso identificare ogni forma lineare con le

n-ple $(\underline{L}_1, \dots, \underline{L}_n)$

per distinguere $\mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{R}^n)^*$ può esser

conveniente scriver $\underline{L}$ come vettore

riga e $\underline{x}$ come vettore colonna

— o —

Una base per V^* sono le

forme lineari

$$\underline{e}^{(i)}[\cdot] \quad \text{t.c.} \quad e^{(i)}[W] = x_i$$

$$L[\,] = \sum L_i \underline{e}^{(i)}[\cdot] \qquad (\text{RGM} \quad W = \sum x_i \underline{e}_i)$$

ora se $W = \sum x_i \underline{e}_i = \sum y_j \underline{f}_j$

$$V \xrightarrow{\text{introduciamo una base}} \underline{e}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n, \vec{x}$$

$$\underline{f}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n, \vec{y} = A\vec{x}$$

($\underline{f}_i$ sono un'altra base) $L_i^{(y)}$

$$L(\vec{W}) = \sum x_j \underbrace{L[\underline{e}_j]}_{L_j^{(x)}} = \sum y_i \underbrace{L[\underline{f}_i]}_{L_i^{(y)}}$$

$$\vec{y} = A\vec{x} \Rightarrow y_i = \sum_j A_{ij} x_j$$

$$\sum x_J L_J^{(x)} = \sum_{i} L_i^{(y)} A_{iJ} x_J$$

$$L_J^{(x)} = \sum_i L_i^{(y)} A_{iJ}$$

$$\left(L_1^{(x)}, \dots, L_m^{(x)} \right) = \left(L_1^{(y)}, \dots L_m^{(y)} \right) A$$

(molt. A a destra!!)

se scrivo tutto in colonne

$$L^{(x)} = A^T L^{(y)} \qquad y = Ax$$

$$L^{(y)} = A^{-T} L^{(x)}$$

Infatti quando calcolo il lavoro

$$\int_\gamma F \cdot \hat{v}\, d\ell = \int_a^b F(x(t)) \cdot \dot{x}\, dt =$$

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^m F_i(x(t))\, \dot{x}_i \right) dt$$

Ora $\forall x \in A$ definisco

$\omega(x)[\ ] \in (\mathbb{R}^n)^*$ (una FORMA LINEARE)

tale che

$$\omega(x)[h] = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, h_i \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$$

$$\int_\gamma F \cdot \hat{\tau}\, dl = \int_a^b \omega(x(t))\,[\dot{x}(t)]\, dt$$

sto integrando una forma lineare

ora in generale chiamo

FORMA DIFFERENZIALE (UNO-FORMA)

una mappa continua

$$\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$$

$$x \to \omega(x)[\cdot]$$

di coordinate

$(\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))$

$$\omega(x)[h] = \sum \omega_i(x)\, h_i \equiv (\omega_1, \dots \omega_n)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

prodotto scalare

$$\equiv \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

ESEMPIO: Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$df(x)[h] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, h_i = \nabla f \cdot h$$

$df(x_0)[\cdot]$ è la funzione lineare che meglio approssima $f(x)$ vicino a x_0

REM. Una base per V^* sono le forme lineari

$$\underline{e}^{(i)}[\cdot] \quad \text{t.c.} \quad e^{(i)}[w] = x_i$$

$$L[\,] = \sum L_i\, \underline{e}^{(i)}[\cdot] \quad (\text{REM } w = \sum x_i\, \underline{e}_i)$$

quindi potrei scrivere

$$\omega(x)[\cdot] = \sum \omega_i(x) \underline{e}^i[\cdot] \qquad \underline{e}^i[h] := h_i$$

di solito si preferisce una notazione diversa

considero la funzione "x_1" $\vec{x} \longrightarrow x_1$

(a $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{associo}} x_1$ la prima coordinata)

$$dx_1[h] \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_1}{\partial x_i} h_i = h_1$$

$$dx_1[\cdot] \equiv \underline{e}^{(i)}$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\vec{x})\, dx_i$$

Quindi dato un campo vett.

$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ associo una uno forma

$$\omega = \sum F_i(x)\, dx_i \quad \text{e viceversa.}$$

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \omega(\vec{x}(t))\,[\dot{\vec{x}}(t)]\, dt$$

$[a,b] \longrightarrow \vec{x}(t)$ curva parametrica regolare

(l'integrale di una uno forma su una curva regolare è eguale al lavoro del campo vett associato e viceversa)

N.B $\omega = \sum \omega_i(x)\, dx_i$

un modo rapido per pensare a $\omega(x(t))\,[\dot{x}(t)]$ è sostituire $\vec{x}(t)$ ricordando che $dx_i(t) = \dot{x}_i(t)\,dt$

Un po di esempi (altro foglio)

UNO forma | campo vettoriale

$\omega = \sum \omega_i(\vec{x})\, dx_i$ $\Longleftrightarrow$ $F_\omega = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

$\int_\gamma \omega$ | $\int_\gamma F \cdot \hat{v}\, dl$

Se $\exists\, f \in C^1(A, \mathbb{R})$ t.c. $\omega = df \;\; \forall\, \vec{x} \in A$

ω è esatta in A

f è una primitiva di ω

$\Longleftrightarrow$

$F = \nabla f$ è conservativo

f è il potenziale di F

Se ω è esatta

$\oint_\gamma \omega = 0 \quad \forall \gamma$ curva chiusa

$\Longleftrightarrow$ $\oint_\gamma F \cdot \hat{v}\, dl = 0$

IN $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ –

ω è chiusa $\Longleftrightarrow$ F è IRROTAZIONALE

n

$$\omega = \sum_{i=1} w_i \, dx_i$$

$(n = 2, 3)$

$\operatorname{rot} F = 0$

$$F = \begin{pmatrix} w_1(x) \\ \vdots \\ w_n(x) \end{pmatrix}$$

NOTA BENE

se ω è esatta in $A \Rightarrow$

ω è chiusa

il viceversa NON è vero

infatti (in $\mathbb{R}^2$)

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$\left(F = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right.$ visto venerdì $\left. \right)$

$\int_{S_1} \omega = \int_{S_1} F \cdot \hat{n} \, d\ell = 2\pi$ (vedi lezione di venerdì)

Se ω NON è chiusa

$\Downarrow$

ω NON può essere esatta

Se esiste una curva chiusa γ

t.c. $\oint_\gamma \omega \neq 0 \Rightarrow \omega$ NON può essere esatta.

Teorema 16.2 *Sia* $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$ *una forma differenziale continua*[1] *in un aperto*

[1] Questo significa che tutte le componenti a_i sono funzioni continue in A.

connesso A. Se comunque si prendano due punti $\mathbf{x}_1$ *e* $\mathbf{x}_2$ *di A e due curve* γ_1 *e* γ_2 *di* $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, *si ha*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega,$$

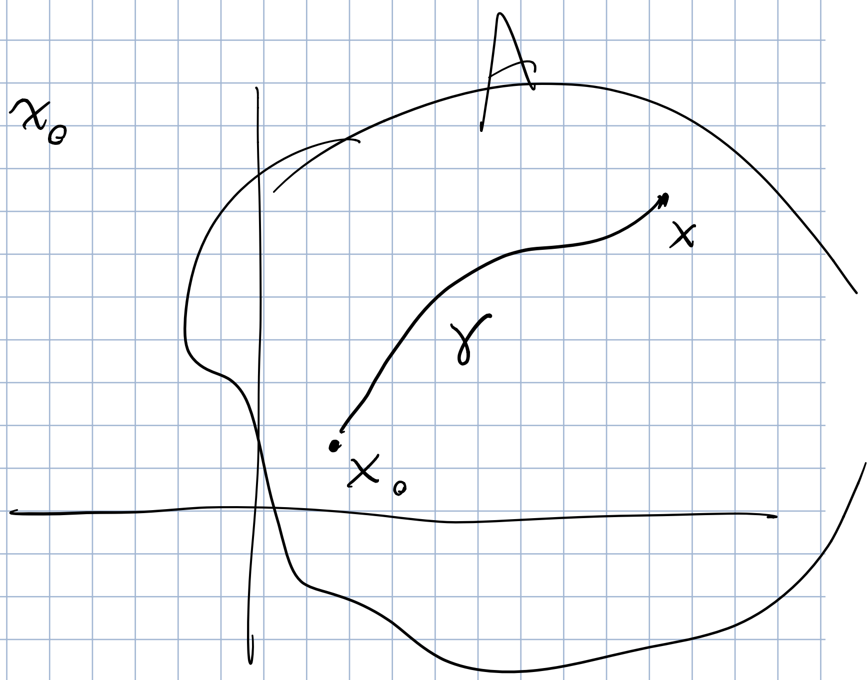
allora ω *è esatta.*

Devo trovare $f \in C^1(A, \mathbb{R})$

tale che $df(x) = \omega(x) \quad \forall x \in A$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

fisso un punto x_0 di A e così



A è connesso

$\Rightarrow$ è connesso per archi,

quindi $\forall x \in A$

esiste un cammino regolare a tratti γ da x_0 a x

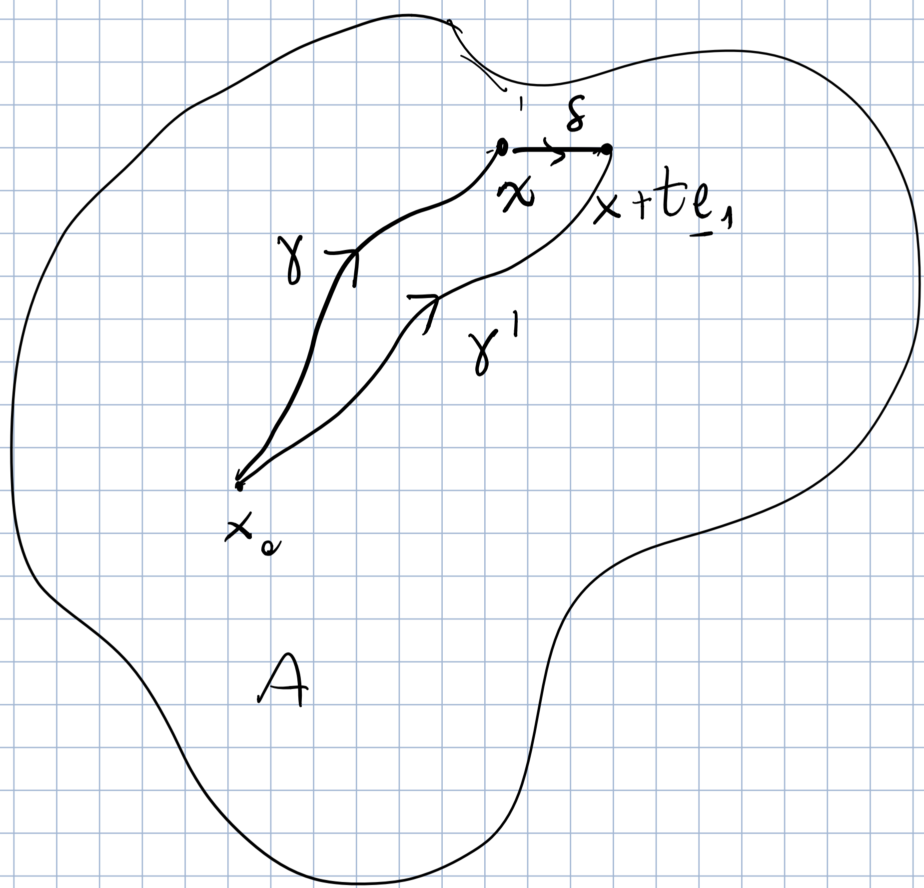
definisco

$$f(x) = \int_\gamma \omega$$

N.B. non dipende da γ per ipotesi!

per dimostrare che $df = \omega$ devo calcolare $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\underline{e}_i) - f(x)}{t}$$



Se t è sufficientemente piccolo tutto il segmento δ da x a $x+t\underline{e}_i$ appartiene ad A

ora $$f(x+te_i) = \int_{\gamma'} \omega = \int_{\gamma \cup \delta} \omega$$

(anche $\gamma \cup \delta$ è un cammino da)

x_0 a $x + t\,\underline{e}_i$

$f(x + t e_i$

$$f(x+t\underline{e}_i) = \int_{\gamma \cup \delta} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\delta} \omega = f(x) + \int_{\delta} \omega$$

$\tau \in [0,t]$

$$\delta \Rightarrow \quad x(\tau) = x + \tau\,\underline{e}_i \qquad \dot{x}(t) = \underline{e}_i$$

$$\int_{\delta} \omega = \int_0^t \omega(x(\tau))[\underline{e}_i]\,d\tau = \int_0^t \omega_i(x+\tau\underline{e}_i)\,d\tau$$

$$\frac{f(x+t\underline{e}_i) - f(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \omega_i(x+\tau\underline{e}_i)\,d\tau$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t \omega_i(x+\tau\underline{e}_i)\,d\tau = \omega_i(x)$$

(teorema della media integrale)

quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x)$ $\boxtimes$