Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ si dice **sconnesso** (o "non connesso") se esistono due insiemi aperti A e B tali che se $A_E := A \cap E$ e $B_E := B \cap E$ allora

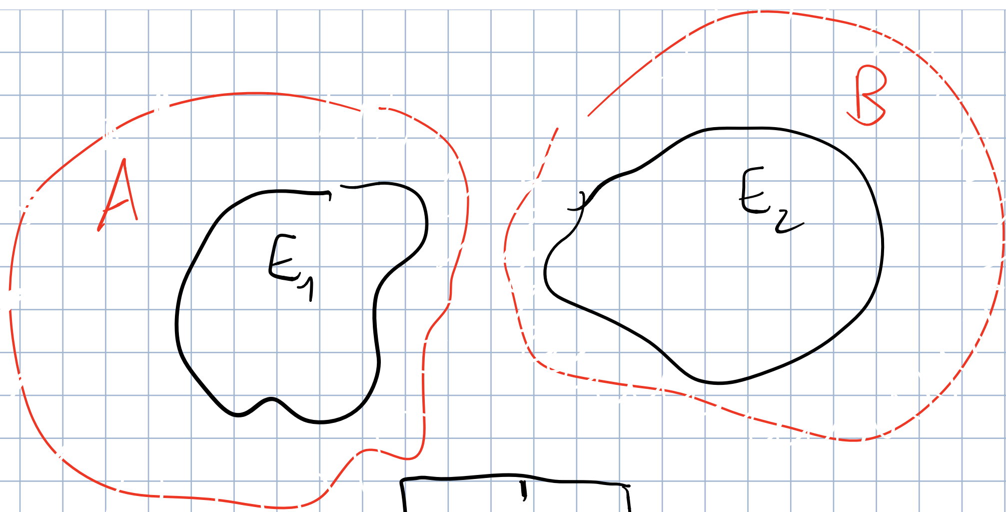
$$A_E \neq \emptyset \,, \quad B_E \neq \emptyset \,, \quad A_E \cap B_E = \emptyset \,, \quad E = A_E \cup B_E \;; \tag{1.31}$$

e diremo che A e B sconnettono E. Un insieme è **connesso** se non è sconnesso.

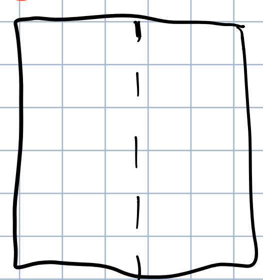
Osservazione 1.22 (i) Una parafrasi della definizione di insieme sconnesso è[23]:
E è sconnesso se è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti nella topologia relativa.

(ii) Dalla definizione segue immediatamente che: *E è connesso se e solo se i soli sottoinsimei di E simultaneamente aperti e chiusi (nella topologia relativa) sono $\emptyset$ e E.*

(iii) $\mathbb{R}^n$ è ovviamente connesso. Un esempio di insieme sconnesso di $\mathbb{R}^n$ è dato da $\mathbb{Z}^n$ (basta prendere come A la sfera centrata nell'origine di raggio $1/3$ e come B l'insieme dei punti x con $|x| > 1/2$).

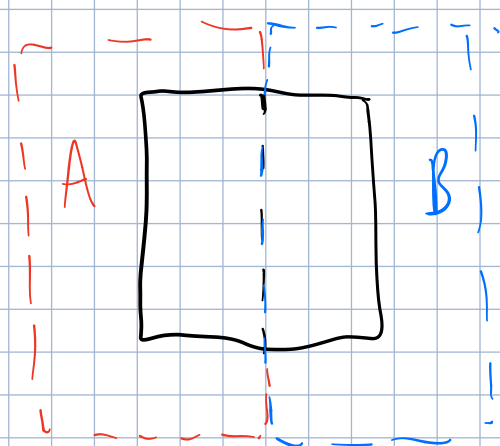


$E = E_1 \cup E_2$



$\leftarrow (x,y) : \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \,,\ -1 \leq y \leq 1 \\ x \neq 0 \end{array} \right\}$

è sconnesso



La connessione è un invariante topologico:

Proposizione 1.23 *Se E è connesso e f è continua su E allora $f(E)$ è connesso.*

Una definizione utile

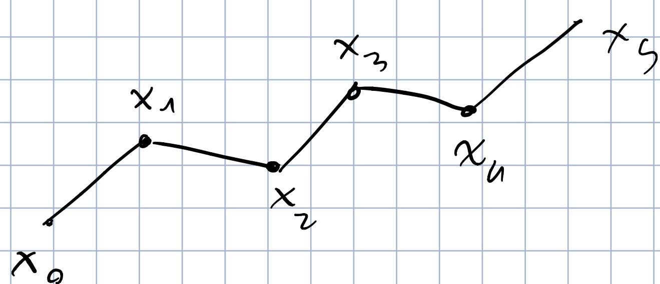
è CONNESSO per CURVE (per "archi")

Rem una curva è una mappa

continua $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{[a,b]}} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$

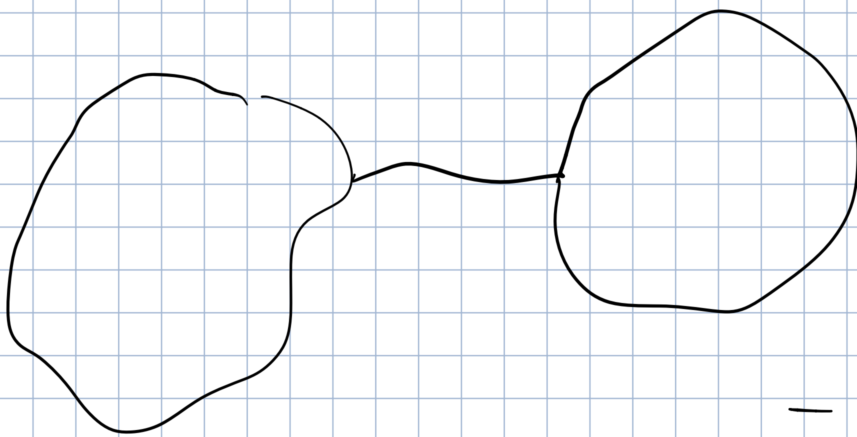
chiamo $\varphi(a)$ e $\varphi(b) \in \mathbb{R}^n$ gli ESTREMI

Una curva poligonale è unione di segmenti



$$\begin{cases} (1-t)x_0 + t x_1 & \text{per } 0 \le t \le 1 \\ (2-t)x_1 + (t-1)x_2 & \text{per } 1 \le t \le 2 \\ \vdots & \end{cases}$$

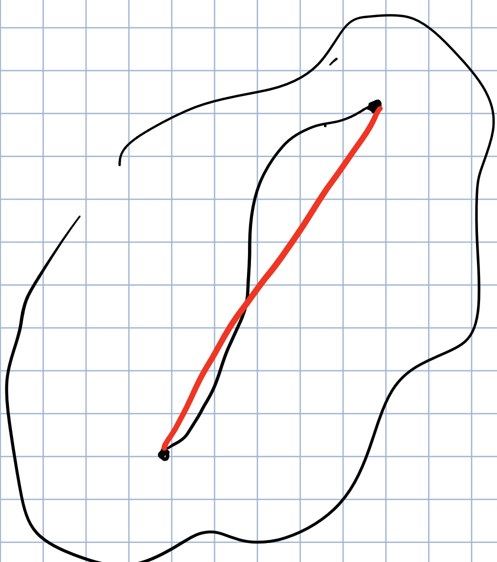
Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ di dice **connesso per curve** (rispettivamente, "per poligonali") se per ogni $x, y \in E$, esiste una curva (rispettivamente, "una poligonale") di estremi x e y tutta contenuta in E.

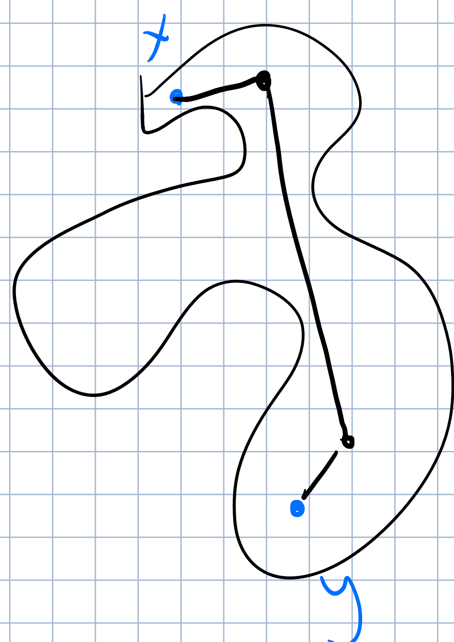


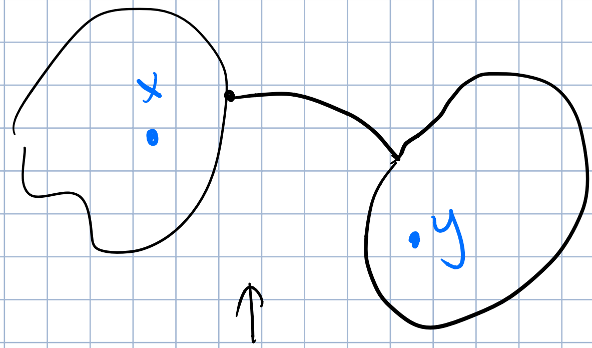
è connesso!

(ma non per poligonali)

Proposizione 1.24 (i) *Un insieme di $\mathbb{R}^n$ connesso per curve è connesso.*
(ii) *Un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ connesso è connesso per poligonali.*







nessuna poligonale $\subseteq E$

congiunge x e y

Esempi:

ma non connesso per poligonali.

(v) Sia $E_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0 \ , \ -1 \leq y \leq 1\}$ e $E_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x \leq \frac{1}{\pi} \ , \ y = \text{sen} \frac{1}{x}\}$. L'insieme in $\mathbb{R}^2$ dato da $E := E_0 \cup E_1$ è connesso ma non è connesso per curve.

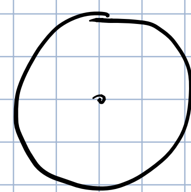
$E =$ 

Grafici di funzioni

Per rappresentare $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$
$[a,b] \subset \mathbb{R}$
una curva

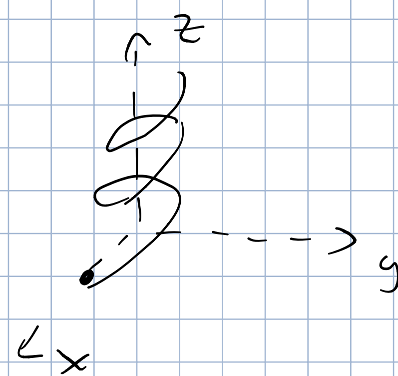
di solito si disegna il suo "supporto" cioè $\varphi([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$

$$t \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



$$[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

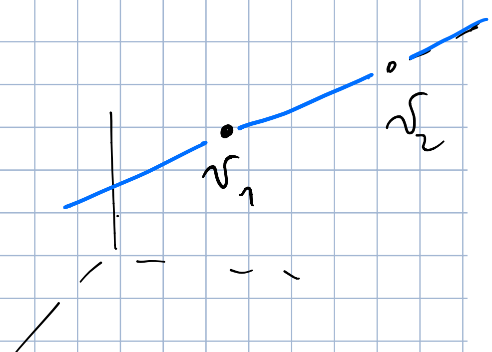
$$t \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$



$$t \to t v_2 + (1-t) v_1$$

$v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R}^n$ è una retta

che passa per v_1, v_2



Funzioni da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \xrightarrow{\varphi} (\varphi_1(u,v) ; \varphi_2(u,v) ; \varphi_3(u,v))$$

Di nuovo conviene disegnare il supporto cioè si considera un dominio compatto (la chiusura di un aperto)

$$\varphi : K \to \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \to (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))$$

o a volte si scrive direttamente

$$(u,v) \longrightarrow (x(u,v) , y(u,v) , z(u,v))$$

disegno $\varphi(K)$

Esempio:

$u \in [0,1]$ $v \in [0,2\pi]$

$x = u \cos v$

$y = u \sin v$

$z = u$

superficie laterale di un CILINDRO

Per rappresentare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

① Funzioni lineari

lo spazio vettoriale delle funzioni LINEARI $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è il DUALE di $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^n)^*$. $L[x] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c.

$$L[x_1 + x_2] = L[x_1] + L[x_2] \qquad L[\lambda x] = \lambda L[x]$$

$(\mathbb{R}^n)^*$ è UNO SPAZIO VETTORIALE di DIM $= n$

Ricordando che $x = \sum x_i \underline{e}_i$

dove $\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ posto i

quindi $L[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i L(\underline{e}_i)$

quindi ponendo $L(\underline{e}_i) =: l_i$

e $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ $L[x] = \sum x_i l_i$

posso rappresentare:

$x \xrightarrow{L} l \cdot x$ (prodotto scalare)

$x \xrightarrow{L} l^T x$ (uso per colonne)

$(x,y) \xrightarrow{f} l_1 x + l_2 y$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

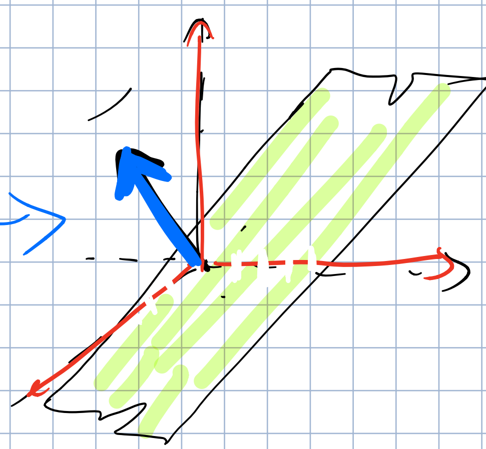
disegniamo il grafico $z = l_1 x + l_2 y$

$= \quad (-l_1, -l_2, 1) \cdot (x, y, z) = 0$

↖ è un piano!

ortogonale a

$(-l_1, -l_2, 1)$



Es.

$f(x,y) = x - y$

Naturalmente una funzione lineare

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è rappresentato da una matrice

$m \times n$ (m righe n colonne)

$\vec{x} \longrightarrow M\vec{x}$ (prodotto riga per colonna)

Funzioni quadratiche $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Polinomi omogenei di grado $= 2$

Si rappresentano tramite le matrici simmetriche $n \times n$

$$\vec{x} \longrightarrow \frac{1}{2} \vec{x} \cdot M\vec{x}$$ ← prodotto riga colonne

prodotto scalare

$$\vec{x} \cdot M\vec{x} = \sum x_i (M\vec{x})_i =$$

$$\sum x_i \left(\sum_j M_{ij} x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} x_i x_j$$

Esercizio: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

disegnare $f: (x,y) \longrightarrow x - y + 1$

disegnare $(x,y) \longrightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$

quando 1. $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ 2. $\lambda_1 \lambda_2 = 0$

3 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Definizione $f: \mathbb{R}^n / \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ si

dice omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se

$\forall \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0\} \qquad f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$

un pó di esempi

Esercizio: $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_4$$

Scrivere la matrice associata

$$f(x) = \frac{1}{2}(x, M x)$$

Risp

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio sia $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Q(x) = \sum Q_{ij}\, x_i \cdot x_j \quad \text{t.c.} \quad Q_{ij} = Q_{ji}$$

verificare che

$$Q_{ij} = \frac{d}{d\lambda} Q(\underline{e}_i + \lambda \underline{e}_j)\Big|_{\lambda=0}$$