Una 1-forma è una mappa (almeno continua)

$A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$

A è un aperto di $\mathbb{R}^n$

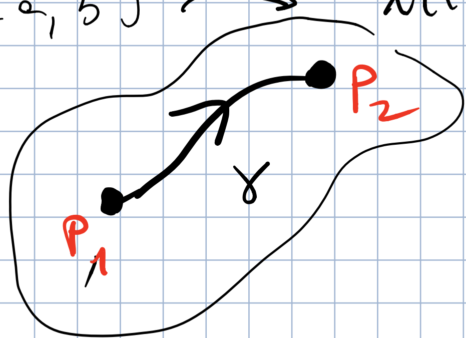
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\vec{x})\, dx_i \qquad dx_i[h] = h_i$$

$$\underline{e}^{(i)}[h] \quad \text{BASE DUALE}$$

a volte si associa a ω il campo vettoriale $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ [scritto in colonna]

Definizione (integrale di ω lungo γ)

$[a,b] \xrightarrow{t} \vec{x}(t)$ curva parametrica regolare



$\vec{x}(a) = P_1 \qquad \vec{x}(b) = P_2$

$$\int_{\gamma,(P_1,P_2)} \omega := \int_{\gamma,(P_1,P_2)} \omega[\hat{v}]\, dl = \int_a^b \omega(\vec{x}(t))[\dot{\vec{x}}(t)]\, dt$$

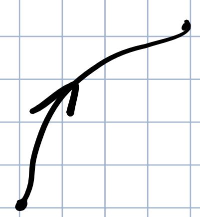
$$= \int_{\gamma, P_1, P_2} F_\omega \cdot \hat{v}\, dl$$

(l'integrale di una uno forma su una curva regolare è eguale al lavoro del campo vett)

associato e viceversa

uno forme versus campi vettoriali

$\omega : A \to (\mathbb{R}^n)^*$	$F : A \to \mathbb{R}^n$
$\omega = \sum \omega_i(\vec{x})\, dx_i$	$F_\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$
$\int_{\gamma_1(P_1,P_2)} \omega$ $\Longleftrightarrow$	$\int_{\gamma_1(P_1,P_2)} F \cdot \hat{v}\, dl$



se $\exists\, f \in C^1(A,\mathbb{R})$	se $\exists\, f \in C^1(A,\mathbb{R})$
t.c. $\omega = df \quad \forall\, \vec{x} \in A$	$F = \nabla f$ è
ω è ESATTA in A $\Longleftrightarrow$	CONSERVATIVO
f è una primitiva di ω	f è il potenziale di F

se ω è esatta

$\oint_\gamma \omega = 0 \quad \forall \gamma$ curve chiusa $\Longleftrightarrow$ $\oint_\gamma F \cdot \hat{v}\, dl = 0$

IN $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ — $n = 2,3$

$\omega \in C^1(A, (\mathbb{R}^n)^*)$ | $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$

ω è chiusa $\iff$ F è IRROTAZIONALE

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx_i$$

$(n = 2,3)$

$$\mathrm{rot}\, F = 0$$

$$F = \begin{pmatrix} \omega_1(x) \\ \vdots \\ \omega_n(x) \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^2$ $\quad \dfrac{\partial \omega_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x} = 0$

in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \omega_3}{\partial y} - \dfrac{\partial \omega_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial z} - \dfrac{\partial \omega_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x} - \dfrac{\partial \omega_1}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega = 3x^3y \, dx + (y^2 + x^4) \, dy$$

È chiusa ?

È esatta ?

$$\omega = x^2y \, dx + y \, dy$$

Teorema (16.4 Giusti) Condizione NECESSARIA

perché $\omega \in C^1(A, (\mathbb{R}^n)^*)$ sia esatta in A

è che sia chiusa cioè CHIUSA

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \quad \forall\, i, j = 1, \dots, n$$

SE $\omega = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ ESATTA $\Rightarrow \omega$ è chiusa

il viceversa NON è vero infatti (in $\mathbb{R}^2$)

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

$\left(F = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right.$ visto venerdì $\left.\right)$

$$\int_{S_1} \omega = \int_{S_1} F \cdot \hat{n}\, dl = 2\pi$$ (vedi lezione di Venerdì)

OSSERVAZIONE:

1. Se ω NON è chiusa

$\Downarrow$

ω NON può essere esatta

② Se esiste una curva chiusa γ

t.c. $\oint_\gamma \omega \neq 0 \Rightarrow \omega$ NON può essere esatta.

Cambi di coordinate (abbiamo visto 7/4)

$$\vec{y} = p(\vec{x}) \iff \vec{x} = p^{-1}(\vec{y})$$

$$y_i = p_i(\vec{x}) \qquad \Omega = \sum \Omega_j(\vec{y})\, dy_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_i(y)\, dy_i = \sum_i \Omega_i(p(\vec{x}))\, d\, p_i(\vec{x})$$

$$d p_i(\vec{x}) = \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial x_j}\, dx_j$$

$$\hookrightarrow \sum_i \Omega_i(p(\vec{x})) \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial x_j}\, dx_j =$$

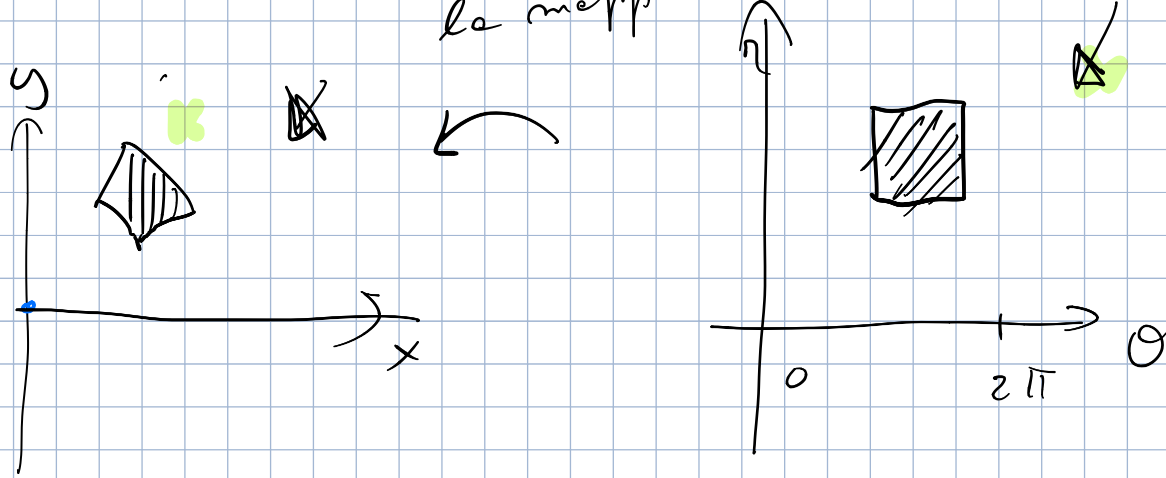
$$\sum_j \sum_i (Jp)_{ij}\, \Omega_i(p(\vec{x}))\, dx_j =: \sum_j \omega_j\, dx_j$$

$$\boxed{(\omega_1, \dots, \omega_n)} = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)\,(J_p)$$

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$ definita per $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

la mappa è 1 a 1



$$\omega \rightsquigarrow -\frac{r\sin\theta}{r^2}\,d(r\cos\theta) + \frac{r\cos\theta}{r^2}\,d(r\sin\theta)$$

$$= -\frac{\sin\theta}{r}\left(\cos\theta\,dr + r\sin\theta\,d\theta\right) +$$

$$\frac{\cos\theta}{r}\left(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta\right) = d\theta$$

Teorema 16.2 *Sia* $\omega = \sum_{i=1}^{n} \overset{\omega_i}{\cancel{a_i}}\, dx_i$ *una forma differenziale continua*[1] *in un aperto*

[1] Questo significa che tutte le componenti a_i sono funzioni continue in A.

connesso A. Se comunque si prendano due punti $\mathbf{x}_1$ *e* $\mathbf{x}_2$ *di A e due curve* γ_1 *e* γ_2 *di* $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, *si ha*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega,$$

allora ω *è esatta.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $\mathbf{x}_0$ in A e definiamo la funzione

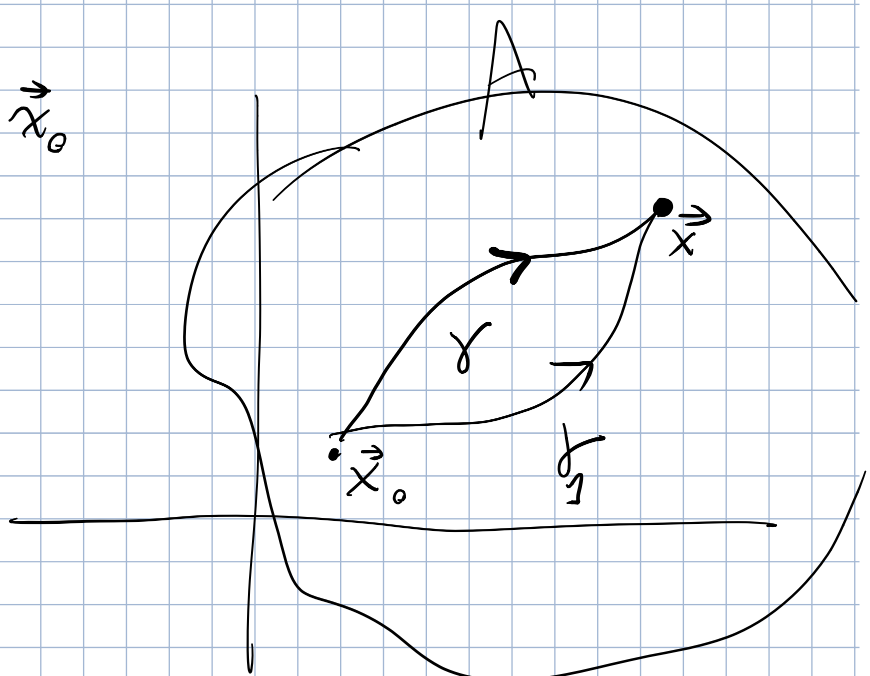
curve regolari a tratti da x_1 a x_2

Devo trovare $f \in C^1(A, \mathbb{R})$

tale che $df(x) = \omega(x) \quad \forall x \in A$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x) \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$$

fisso un punto $\vec{x}_0$ di A e cosa



A è connesso

$\Rightarrow$ è connesso per archi,

quindi $\forall\, x \in A$

esiste un cammino regolare a tratti

γ da x_0 a x

definisco

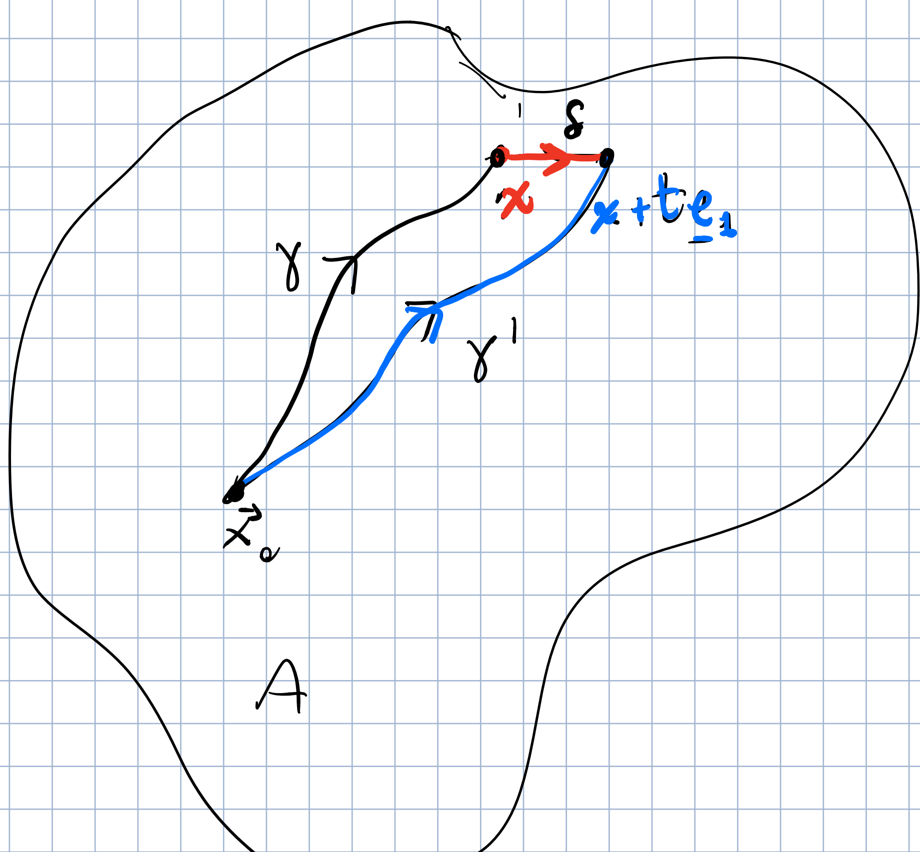
$$f(\vec{x}) := \int_\gamma \omega$$

N.B. non dipende da γ per ipotesi!

per dimostrare che

$df = \omega$ devo calcolare $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\,\underline{e}_i) - f(\vec{x})}{t}$$



Se t è sufficientemente piccolo tutto il segmento δ da x a $x + t\underline{e}_i$ appartiene ad A

ora $f(\vec{x} + t\underline{e}_i) = \int_{\gamma'} \omega = \int_{\gamma \cup \delta} \omega$

(anche $\gamma \cup \delta$ è un cammino da x_0 a $x + t\underline{e}_i$)

$f(x + t e_i$

$$\boxed{f(x + t\underline{e}_i) =} \int_{\gamma \cup \delta} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\delta} \omega = \boxed{f(x) + \int_{\delta} \omega}$$

$\tau \in [0, t]$

$$\delta \Rightarrow x(\tau) = x + \tau \underline{e}_i \qquad \dot{x}(t) = \underline{e}_i$$

$$\int_{\delta} \omega = \int_0^t \omega(x(\tau))[\underline{e}_i]\, d\tau = \int_0^t \omega_i(x + \tau \underline{e}_i)\, d\tau$$

$$\frac{f(x + t\underline{e}_i) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \omega_i(x + \tau \underline{e}_i)\, d\tau$$

$t \qquad\qquad 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega_i (x + \tau e_i) \, d\tau = \omega_i (x)$$

(teorema della media integrale)

quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x)$ $\blacksquare$

Teorema 16.3 *Sia ω una forma differenziale continua in un aperto connesso A. Condizione necessaria e sufficiente affinché ω sia esatta è che per ogni curva chiusa γ, regolare a tratti e con sostegno in A risulti*

$$\int_\gamma \omega = 0. \qquad [16.10]$$

Se $\omega = df$ allora

sem $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$

$$\oint_\gamma \omega = \int_a^b \sum \omega_i(\vec{x}(t))\, x_i'(t)\, dt =$$

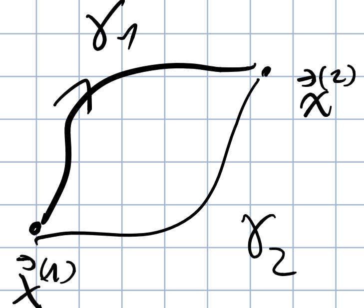
$$\int_a^b \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t))\, x_i'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(f(x(t))\right) dt = 0$$

Se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma \subset A$

allora sono $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)} \in A$ e siano

γ_1 e γ_2 due curve in A che vanno da

$\vec{x}^{(1)}$ a $\vec{x}^{(2)}$



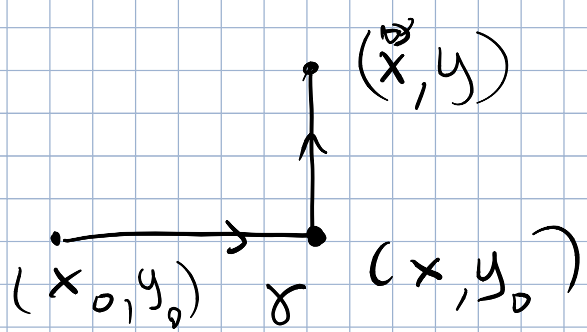
$\gamma_1 \cup \gamma_2$ è una curva chiusa regolare a tratti $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = 0 \quad \text{però} \quad \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1, (x^{(1)}, x^{(2)})} \omega + \int_{\gamma_2, (x^{(2)}, x^{(1)})} \omega$$

quindi
$$\int_{\gamma_1, (x^1, x^2)} \omega = \int_{\gamma_2, (x^1, x^2)} \omega$$

quindi l'integrale non dipende dal cammino $\Rightarrow$ ω è esatta (Teorema 16.2.)

So che ω è esatta



$$f(x) = \int_{\gamma} \omega$$

$$\omega = \omega_1(x,y)\,dx + \omega_2(x,y)\,dy$$

$$g(x,y) = \int \omega_1(x,y)\,dx$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \omega_1$$

$$f(x,y) = g(x,y) + h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} = \omega_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \omega_2 = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \underbrace{\omega_2(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}$$

deve dipendere

solo da y

$$= \int \left(\omega_2(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right) dy$$