SERIE DI POTENZE

Una serie della forma

$$S(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$$ si dice serie di potenze

($x - x_0 = t$)

centrata in x_0

$S(x)$ converge sempre in $x = x_0$

1) Esistono serie di potenze che convergono solo in $x = x_0$, esistono serie che conv. $\forall x \in \mathbb{R}$

Possiamo sempre ipotizzare che $x_0 = 0$ altrimenti cambiamo la variabile

$$x - x_0 = \hat{x}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \rightsquigarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j \hat{x}^j$$

(poi la richiamo x !)

Caso semplificato

Hp: esiste $\lim_{j \to \infty} \sqrt[j]{|a_j|} =: L$

TEOREMA:

Caso 1. $L = \infty$; $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ converge

solo per $x = 0$.

Caso 2. $L = 0$; $\sum a_j x^j$ converge

ASSOLUTAMENTE per ogni $x \in \mathbb{R}$

$\sum a_j x^j$ converge totalmente in ogni

COMPATTO di $\mathbb{R}$.

Caso 3. $0 < L < \infty$; $\sum a_j x^j$

1) converge per $|x| < \frac{1}{L}$

più precisamente converge totalmente

in $|x| \leq \rho < \frac{1}{L}$ $\left(\forall\, 0<\rho<\frac{1}{L} \right)$

(quindi anche in ogni compatto contenuto in $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$)

② diverge per $|x| > \frac{1}{L}$

③ per $x = \pm \frac{1}{L}$ non posso dire nulla.

Dimostrazione

Basta applicare il criterio della radice

$$\sum \sup_{|x|\leq\rho} |a_j x^j| \leq \sum |a_j| \rho^j$$

quindi si ha convergenza totale se

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|\rho^j} < 1$$

$$\|$$

$$\rho \lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} < 1$$

$$\|$$

$$\rho L < 1 \Rightarrow \rho < \frac{1}{L} \quad \blacksquare$$

CASO GENERALE:

Teorema 1: se $\sum a_j x^j$ converge in un punto $x_0 \neq 0$ allora converge totalm. in $[-\rho, \rho]$ per ogni $0<\rho<r$.

DIM: $\sum a_n x^n$ converge in $x = x_0$

cioè $\sum a_n x_0^n < \infty$

allora necessariamente $a_n x_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

in particolare $|a_n x_0^n| < m \quad \forall n$

quindi per $|x| \leq \rho < |x_0|$

$$\sum a_n x^n = \sum a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

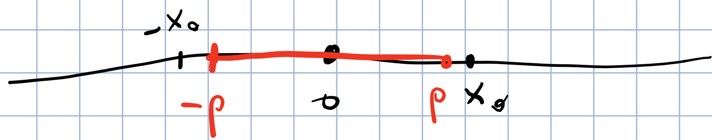
si vede $\sup |a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n| \leq m \left(\frac{\rho}{\ldots}\right)^n$

che $\quad \sup_{|x|\le \rho} \left| a_n x^n \right| \le M \left(\frac{\rho}{|x_0|}\right)^n$

quindi

$$\sum \sup_{|x|\le \rho} |a_n x^n| \le M \sum \left(\frac{\rho}{|x_0|}\right)^n < \infty \qquad \left[\frac{\rho}{|x_0|} < 1\right]$$

e la serie converge Totalmente.



DEF.: (raggio di convergenza)

$$r := \sup \{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum a_n x_0^n \text{ converge in } x_0 \}$$

equivalentemente (per il Teorema 1)

$$\Downarrow$$

$$r := \sup \{ \rho \ge 0 \text{ t.c. } \sum a_n x^n \text{ converge in } [-\rho, \rho] \}$$

Le seguenti affermazioni seguono direttamente

1) se $|x| \le \rho < r$ converge Totalmente

2) se $|x| > r$ non converge

3) se $|x| = r$ DIPENDE DALLA SERIE

Nel caso speciale $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} = L$

(cioè esiste il limite)

$r = \frac{1}{L}$ (cioè se $L = \infty \Leftrightarrow r = 0$

se $L = 0 \Leftrightarrow r = \infty$

se $0 < L < \infty$ $r = \frac{1}{L}$)

Se $r > 0$ la serie definisce una funzione, pongo $f(x) = \sum a_n x^n$ per $x \in (-r, r)$.

TEOREMA: f è C^∞ in $(-r, r)$.

NOTA BENE

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} a_j x^j =: \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

<u>DIM</u>: (STRATEGIA)

calcolo le derivate di $S_n(x)$

1. MOSTRO che $\frac{d}{dx} S_n(x) =: S_n'(x)$

è la somma parziale di una serie

di potenze. $S'_n(x) = \sum_{J=0}^{n} a_J J x^{J-1}$

2. mostro che la serie di potenze

$\lim_{n\to\infty} S'_n(x)$ ha

LO STESSO RAGGIO DI CONVERGENZA

(che ho chiamato r) di $f(x)$

3. $S_n \to f$ uniformemente in $|x| \leq \rho$
$(\rho < r)$

$S'_n \to g$ di nuovo limite uniforme
per $|x| \leq \rho < r$

4. Applico i teoremi sulla convergenza
uniforme per scambiare le derivate
con il $\lim_{n\to\infty}$,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} S'_n(x) = \sum_{J=0}^{\infty} a_J J x^{J-1}$$

$\forall\, x \in (-r, r)$

ora $f'(x) = \sum_{J=0}^{\infty} a_J J x^{J-1}$ è una serie di potenze con raggio di convergenza r

quindi applicando l'argomento di sopra

con $f \rightsquigarrow f'$ ottengo che $f'(x)$

è C^1 e

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(a_J J x^{J-1}\right) = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}\left(a_J x^J\right)$$

quindi per induzione $f \in C^\infty$.

quindi basta dimostrare che

$\sum_{J=0}^{\infty} a_J J x^{J-1}$ ha LOSTESSO RAGGIO DI CONV.

dato che $\sum_{J=0}^{\infty} a_J J x^{J-1}$ è una

serie di potenze basta che dimostro

che converge in $x = p$ $\forall p < r$

CASO SEMPLIFICATO $\left(\exists \lim_{J \to \infty} \sqrt[J]{|a_J|} = L\right)$

$p < r = \frac{1}{L}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j j \rho^{j-1}$$ converge per

il criterio della radice

$$\sqrt[j]{|a_j j \rho^{j-1}|} = \lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} \cdot \lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{j} \cdot \lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\rho^{j-1}}$$

$$= L \cdot 1 \cdot \rho < 1$$

CASO GENERALE

Sia r il raggio di convergenza

di $\sum a_j x^j$ siano ρ, y due numeri

positivi t.c. $0 < \rho < y < r$

Dato che $y < r$ $\sum |a_j| y^j$ converge e

quindi $|a_j| y^j \leq m < \infty$

ora dimostriamo che

$$\sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$$ converge per $x = \rho$

infatti $\quad |J a_J \rho^{J-1}| = J|a_J| y^{J-1}\left(\frac{\rho}{y}\right)^{J-1}$

$\leq \frac{m}{y} J\left(\frac{\rho}{y}\right)^{J-1}$

ma per il criterio della radice

la serie $\frac{m}{y}\sum J\left(\frac{\rho}{y}\right)^{J-1}$ è convergente.

quindi $\sum J a_J \rho^{J-1}$ converge $\forall\, \rho < r$

$\Rightarrow$ r è

$\Rightarrow$ il raggio di convergenza è r

quindi $\quad g(x) := \sum_{J=1}^{\infty} J a_J x^{J-1}$

è ben definita e continua in $(-r, r)$

e $\quad f'(x) = g(x)$

— . —

In conclusione $\quad f(x) = \sum_{J=0}^{\infty} a_J x^J$

1. è $C^\infty((-r,r))$

2. se $|x| > r$ la serie NON CONVERGE (neanche puntualmente)

3. Se $|x| = r$ dipende dalla particolare serie

<u>Per esempio</u>:

$\sum x^J$ converge $|x|<1$, diverge altrimenti

(conv. tot. in $[-\delta,\delta]$ $\forall\, 0<\delta<1$)

$\sum \frac{x^J}{J^2}$ converge totalmente in $[-1,1]$

$\sum \frac{x^J}{J}$ converge per $x \in [-1,1)$

converge tot. in $[-\delta,\delta]$ $\forall\, 0<\delta<1$)

NON converge assolutamente

e quindi neanche totalmente in

$[-1, 8)$

Prop: dato $\sum a_j x^j$ se $r > 0$ è

raggio di convergenza,

si ha conv. tot in $[-r, r]$

se e solo se $\sum |a_j| r^j < \infty$

Dim: - è la definizione di conv. tot

LA CONVERGENZA UNIF. è + complicata

ovviamente conv. tot $\Rightarrow$ conv. unif.

però per esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$ in $[-1, 8]$ converge

(NON assolutam.)

DOMANDA: c'è convergenza UNIFORME?

$\boxed{\text{Criterio di Abel}}$ (x serie di potenze)

Se $\sum a_k x^k$ con raggio di convergenza r

1) converge in $x = r$ allora converge unif. in $[-\rho, r]$ $\forall$ $0 \le \rho < r$

2) converge in $x = -r$ allora converge unif. in $[-r, \rho]$ $\forall$ $0 \le \rho < r$

(Se converge sia in r che in $-r$ allora conv. unif in $[-r, r]$.)

<u>Senza</u> dimostrazione.