Prova preliminare Analisi II

19 giugno 2020

Ogni risposta va accuratamente motivata.

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2} \quad n = 1, 2, \dots$$

(a) Si calcoli il limite puntuale f della successione f_n, cioè la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si stabilisca se la convergenza $f_n \to f$ sia uniforme nell'intervallo $[1, +\infty)$.

(c) Si stabilisca se la convergenza $f_n \to f$ sia uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 2. Studiare l'insieme di convergenza puntuale assoluta uniforme e totale della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + n^2}(x + 1)^n .$$

Esercizio 3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} .$$

Si calcoli il flusso $\int_S F \cdot \hat{n}\, d\sigma$ uscente[1] dalla superficie sferica S definita da

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

[1] La superficie S divide $\mathbb{R}^3$ in una componente limitata E_{lim} (l'interno) e una componente illimitata E_{ill} (l'esterno). La superficie S deve essere orientata in modo tale che il versore normale $\hat{n}$ sia diretto verso la componente illimitata E_{ill}, in ogni punto della superficie S.

Esercizio 4. Sia $\omega : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^4)^*$ la forma differenziale definita da

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{4} a_k(x) dx_k \,, \quad a_k = \frac{x_k}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{3}{2}}} \,, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$$

- Stabilire se ω è esatta.
- Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\varphi \omega$, dove $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^4$ é la curva

$$\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), e^t, t) \,.$$

Esercizio 5. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della funzione 2π periodica definita da

$$f(x) = \sin(x/2) \,, \qquad \text{per} \qquad x \in [-\pi, \pi)$$