Prova preliminare Analisi II

19 giugno 2020

Ogni risposta va accuratamente motivata.

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(a) Si calcoli il limite puntuale f della successione f_n, cioè la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si stabilisca se la convergenza $f_n \to f$ sia uniforme nell'intervallo $[1, +\infty)$.

(c) Si stabilisca se la convergenza $f_n \to f$ sia uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x, y, z) = \cos(y) - 1 + e^z + \sqrt{1+z^2}\log\left(1 + (x-y)^2\right).$$

(a) Si stabilisca se l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisca una funzione implicita $z = f(x, y)$ in un intorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(b) In caso affermativo, si calcoli il gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ della funzione definita implicitamente, nel punto $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (Extra: calcolare l'hessiano)

Esercizio 3. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = te^{-t} \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli il flusso $\int_S F \cdot \hat{n}\, d\sigma$ uscente[1] dalla superficie sferica S definita da

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{se } \ x, y \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Studiare:

1. la continuità di f in $(0,0)$;
2. l'esistenza delle derivate parziali di f in $(0,0)$ (in caso affermativo: calcolarne il valore);
3. l'esistenza della derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione $v = (1,1)$ (in caso affermativo: calcolarne il valore);
4. la differenziabilità di f in $(0,0)$.

Esercizio 6. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della funzione 2π periodica definita da

$$f(x) = \sin(x/2)\,, \qquad \text{per} \qquad x \in [-\pi, \pi)$$

[1] La superficie S divide $\mathbb{R}^3$ in una componente limitata E_{lim} (l'interno) e una componente illimitata E_{ill} (l'esterno). La superficie S deve essere orientata in modo tale che il versore normale $\hat{n}$ sia diretto verso la componente illimitata E_{ill}, in ogni punto della superficie S.