Prova preliminare AM220

20 luglio 2020

Ogni risposta va accuratamente motivata.

1. Sia $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia $\omega : D \to (\mathbb{R}^2)^*$ la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x^3}{x^4+y^4}dx + (\frac{y^3+y^4+x^4}{x^4+y^4})dy$$

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ è una curva che percorre l?arco di parabola $y = -x^2 + 4x - 3$ dal punto $A = (1,0)$ al punto $B = (3,0)$.

2. Determinare il volume e il baricentro del dominio

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1\,, \quad z > 0\}$$

dato il campo vettoriale $F = (z,0,0)$, enunciare e verificare il teorema della divergenza sul dominio E.

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

(a) Si studi la convergenza puntuale di f.

(b) Si stabilisca se la convergenza di f sia uniforme in $[0,1]$.

(c) Discutere la convergenza totale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{in } [1/2, 3/2].$$

4. Trovare i coefficienti di Fourier della funzione 2π-periodica $f(x)$ che vale

$$f(x) = x(x^2 - \pi^2)$$

nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Disegnare f. Discutere la eventuale convergenza uniforme della serie di Fourier della derivata.

5. Si calcoli l'integrale doppio

$$\int_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$

dove D è il dominio

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$