Prova preliminare Analisi II

23 giugno 2020

Ogni risposta va accuratamente motivata.

Esercizio 1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x, y, z) = \cos(y) - 1 + e^z + \sqrt{1 + z^2} \log\left(1 + (x - y)^2\right).$$

(a) Si stabilisca se l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisca una funzione implicita $z = f(x, y)$ in un intorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(b) In caso affermativo, si calcoli il gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ della funzione definita implicitamente, nel punto $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (Extra: calcolare l'hessiano)

Esercizio 2. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = te^{-t} \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + t)\sqrt{1 - x^2} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Extra: cosa succede se il dato iniziale è invece $x(0) = 1$?

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{se } \; x, y \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Studiare:

1. la continuità di f in $(0,0)$;
2. l'esistenza delle derivate parziali di f in $(0,0)$ (in caso affermativo: calcolarne il valore);
3. l'esistenza della derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione $v = (1,1)$ (in caso affermativo: calcolarne il valore);
4. la differenziabilità di f in $(0,0)$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2-y^2} & \text{se } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Studiare:

1. la continuità di f in $(0,0)$;
2. La continuità di f in $(1,1)$.