Prova preliminare Analisi II

20 luglio 2020

Ogni risposta va accuratamente motivata.

1. Data
$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - 4x^2y^2 - 4y^4$$

Trovare tutti i punti critici di f.
Classificare ciascun punto critico, cioè stabilire se è punto di massimo, di minimo o di sella (cioè né di massimo né di minimo).

Determinare il massimo e minimo assoluti di f sul vincolo $\varphi(x,y) := x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.

2. Determinare il volume e il baricentro del dominio

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1\,, \quad z > 0\}$$

dato il campo vettoriale $F = (z, 0, 0)$, enunciare e verificare il teorema della divergenza sul dominio E.

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

(a) Si studi la convergenza puntuale di f.

(b) Si stabilisca se la convergenza di f sia uniforme in $[0,1]$.

(c) Discutere la convergenza totale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{in } [1/2, 3/2].$$

4. Trovare i coefficienti di Fourier della funzione 2π-periodica $f(x)$ che vale

$$f(x) = x(x^2 - \pi^2)$$

nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Disegnare f. Discutere la eventuale convergenza uniforme della serie di Fourier della derivata.

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = 2t\cos^2 y \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(a) Si determini la soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy con dato iniziale $y_0 = \frac{\pi}{4}$.

(b) Si determini la soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy con dato iniziale $y_0 = \frac{\pi}{2}$.

(c) Si determini la soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy con dato iniziale $y_0 = \frac{3\pi}{4}$.