1. Sia

$$E := \left\{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, , \ \text{tali che } z^2 \leq (4 - x^2 - y^2)^2 \, , \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \right\} .$$

1. Disegnare E. Calcolare l'area superficiale di ∂E.
2. Si consideri ora la superficie **laterale** di ∂E:

$$\Sigma := \left\{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, , \ \text{tali che } z^2 = (4 - x^2 - y^2)^2 \, , \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \right\} ,$$

orientata secondo la normale uscente da E.
Dato il campo vettoriale

$$F := \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ z + \frac{x}{x^2+y^2} \\ -y \end{pmatrix}$$

determinarne il dominio massimale di definizione e verificare il teorema del rotore

$$\int_\Sigma \mathrm{Rot} F \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial\Sigma} F \cdot \hat{v} d\ell \, .$$

3. Si puó applicare il teorema del rotore (con lo stesso campo vettoriale F) a $\partial E \setminus \Sigma$?

$P := \left\{ z^2 \leq (4 - x^2 - y^2)^2 \right\} \Rightarrow$

$-(4 - x^2 - y^2) < z < 4 - x^2 - y^2$

$\downarrow$

questa è la

regione compresa fra

due paraboloidi (un verde chiaro

La condizione $x^2 + y^2 \geq 1$

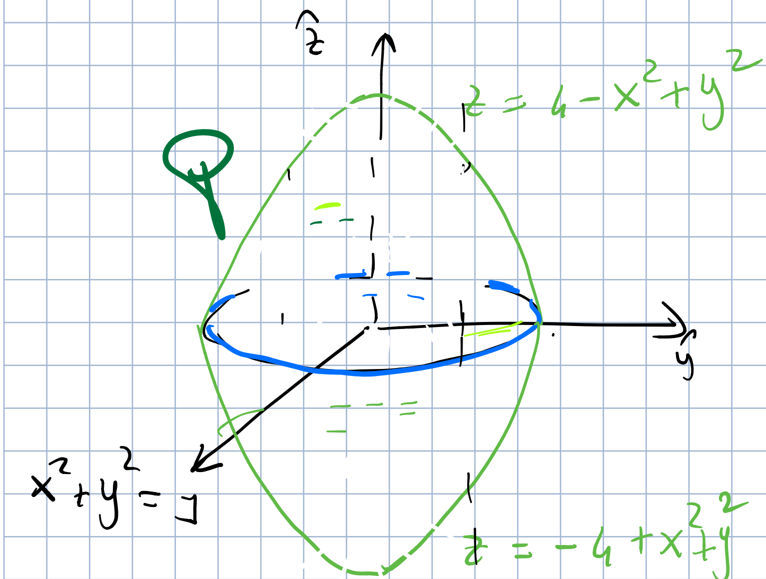
Vedere i

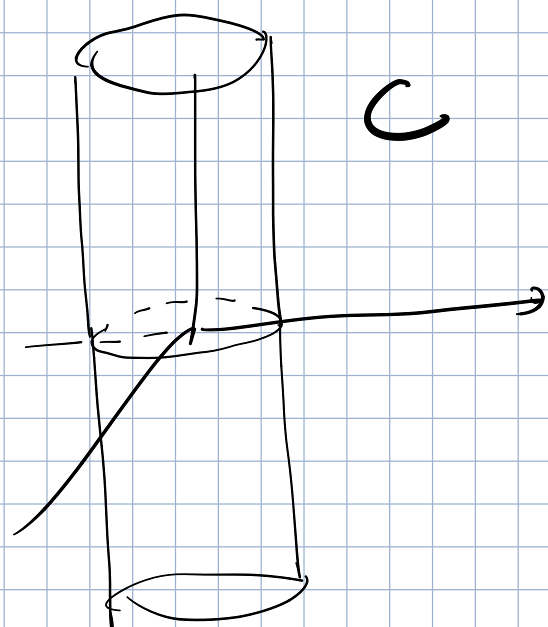
disegni

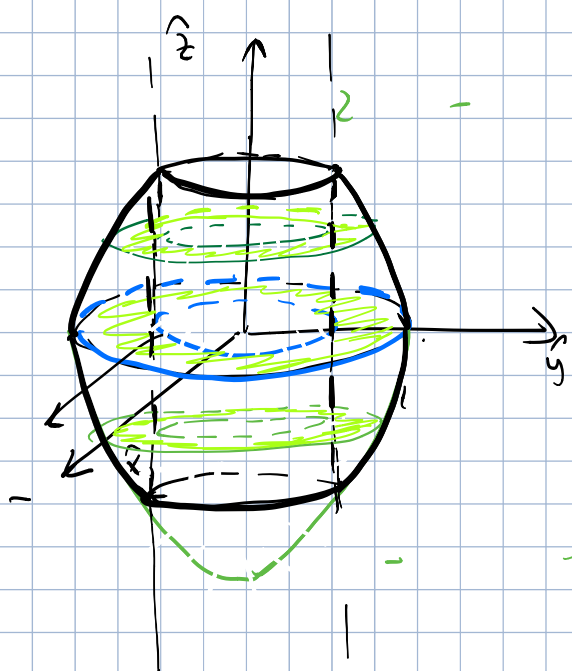
sotto!

individuo la regione AL DI FUORI del cilindro $C := \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1\}$

$E = P/C$ (ho segnato in verde alcune delle sezioni di E con piani orizzontali $z = h$ $\quad 0 \le h < 3$







$$\partial E = \Sigma \cup \Sigma_1$$

$$\Sigma := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = (4 - x^2 - y^2)^2 ;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \}$$

$$\Sigma_1 := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 ;\ -3 < z < 3 \}$$

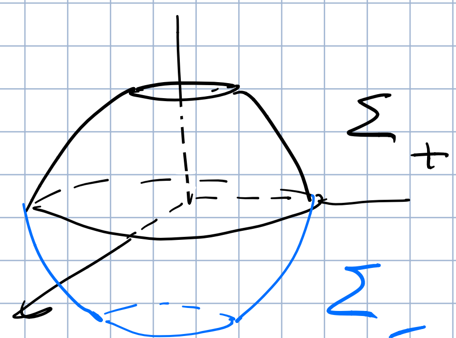
Quindi la superficie laterale è

$$|\partial E| = |\Sigma| + |\Sigma_1|$$

l'area laterale del cilindro è

$$2\pi r h = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$$

$$|\Sigma| = \int_\Sigma dS$$



$$\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$$

dove $|\Sigma_+| = |\Sigma_-|$

quindi parametrizzo e calcolo solo

l'area di Σ_+

$$\varphi \begin{cases} x(u,v) = \sqrt{4-v}\,\cos u \\ y(u,v) = \sqrt{4-v}\,\operatorname{sen} u \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

$$0 \le v \le 3 \qquad 0 \le u \le 2\pi$$

$$\varphi_v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{4-v}}\cos u \\ -\frac{1}{2\sqrt{4-v}}\operatorname{sen} u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} -\sqrt{4-v}\,\operatorname{sen} u \\ \sqrt{4-v}\,\cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sqrt{4-v}\,\operatorname{sen} u & \sqrt{4-v}\,\cos u & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{4-v}}\cos u & -\frac{1}{2\sqrt{4-v}}\operatorname{sen} u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{4-v}\cos u \\ \sqrt{4-v}\sin u \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad dS = \sqrt{(4-v)+\frac{1}{4}}\, du\, dv$$

$\rightsquigarrow$ normale uscente.

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^3 \frac{\sqrt{17-4u}}{2}\, du = \frac{\pi}{6}\cdot\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$$

$$|\partial E| = \frac{\pi}{3}\cdot\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right) + 12\pi$$

(altra possibile param)

$$\begin{cases} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ 4-\rho^2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\rho \end{pmatrix};\ \rho\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0 \le \theta \le 2\pi$; $1 \le \rho \le 2$

$$\vec{n} = \varphi_\rho \wedge \varphi_\theta = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} +2\rho^2 \cos\theta \\ 2\rho^2 \sin\theta \\ \rho \end{pmatrix} \Rightarrow \text{normale uscente!}$$

$$|\Sigma_+| = 2\pi \int_1^2 \rho \sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho =$$

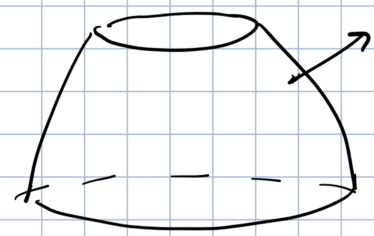
$$\pi \int_1^4 \sqrt{1+4u}\, du = \text{stesso!}$$

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ y \end{pmatrix} =: F_1 + F_2$$

$\operatorname{rot} F_1 = 0$ (visto a lezione!)

$$\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} F_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{per } (x,y,z) \neq (0,0,z)]$$

$$\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & z & -y \end{pmatrix}$$



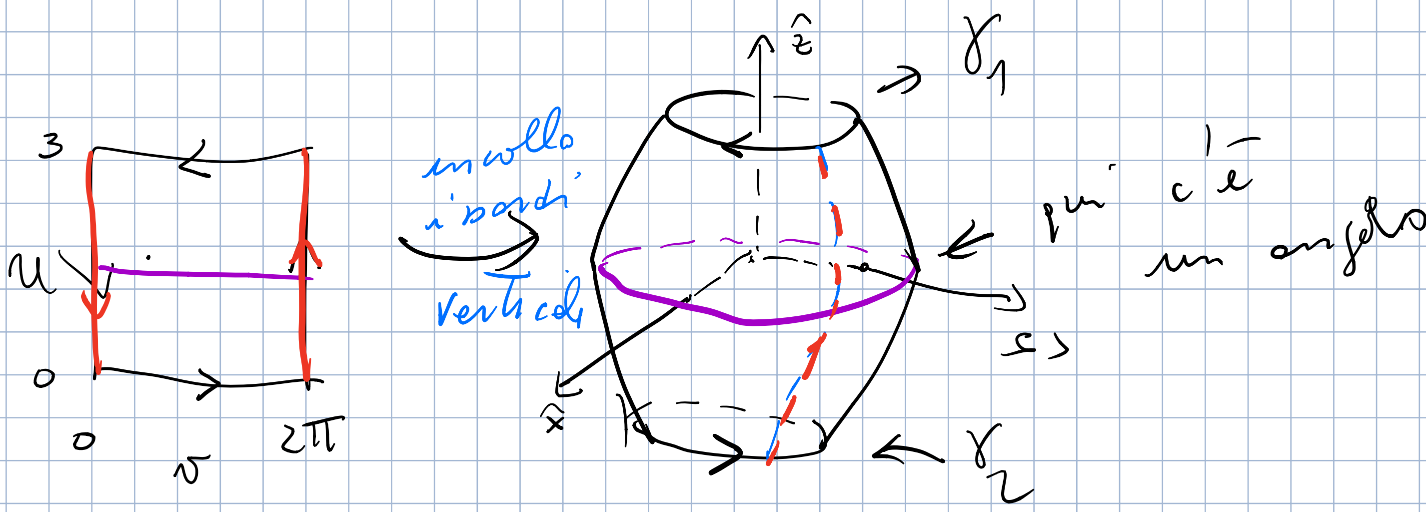
flusso attraverso Σ_+ (con la normale uscente)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{3} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, du\, dv = \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{4-u}\cos v \\ \sqrt{4-u}\sin v \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

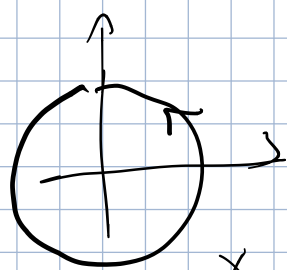
$$+ \; 2\int_0^{3}\int_0^{2\pi} \sqrt{4-u}\,\cos v \, du\, dv = 0$$

stesso gioco per Σ_-

Ora $\partial\Sigma$ sono due circonferenze orizzontali di raggio $= 1$ ed alla altezza $z = \pm 3$ (resp)



$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -3 \end{pmatrix}$$



$$\int_{\gamma_{2,+}} F \cdot \hat{\tau}\, dl = \int \begin{pmatrix} -\sin t \\ -3+\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = 2\pi$$

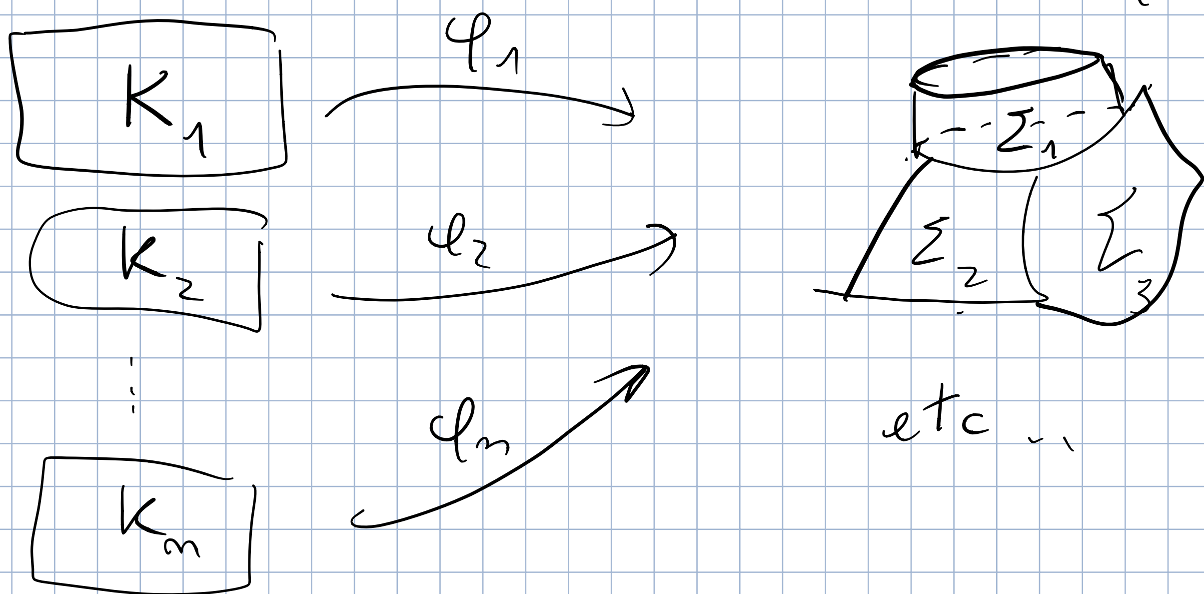
$$\int_{\gamma_{1,-}} F \cdot \hat{\tau}\, dl = \cdots = -2\pi \quad \blacksquare$$

certamente il teorema del rotore

Vale sulla superficie laterale del cilindro.

Alcune osservazioni sul teorema del rotore per superfici regolari a tratti.

Σ regolare a tratti descritta da n "carte" per descrivere Σ devo dove le φ_i e profili punti si incollano.

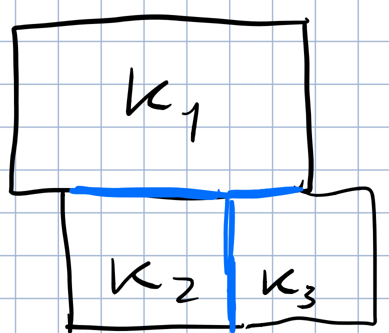


Voglio descrivere il bordo di Σ

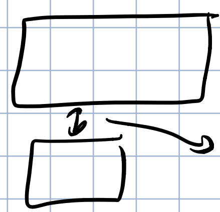
$$\partial\Sigma \subseteq \bigcup \varphi_i(\partial K_i)$$

$\partial\Sigma$ è composta da tutte quelle parti del bordo che NON vengono incollate tra di loro quindi potrei prendere i K_i e incollarli fra di loro (incollo $\vec{x}_i \in \partial K_i$ con $\vec{x}_J \in \partial K_J$ se $\varphi_i(\vec{x}_i) = \varphi_J(\vec{x}_J)$)

vettori bidimensionali



etc..

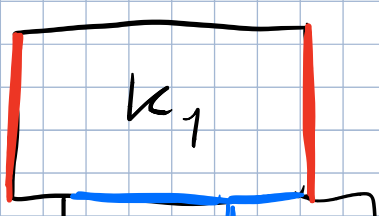


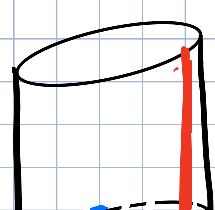
incollo più

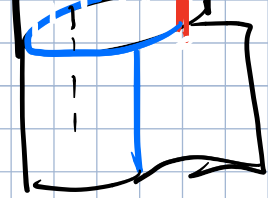
per esempio

i pezzi in blu (che ho incollato) non sono più nel bordo!

ora incollo tutti i pezzi della frontiera ∂K_i tali che $\varphi_i(\vec{x}_i) = \varphi_i(\vec{x}'_i)$

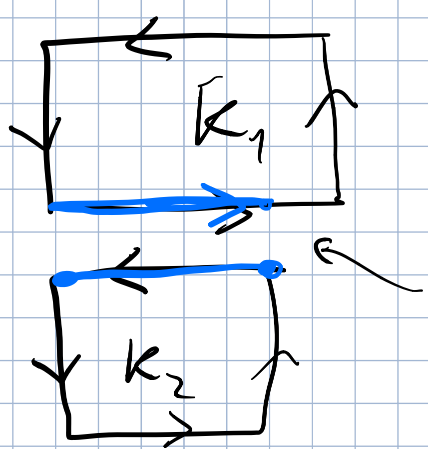






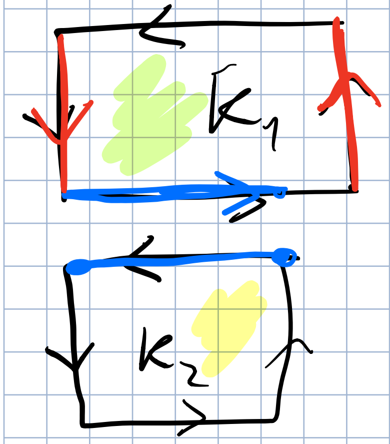
i pezzi in rosso non fanno + parte del bordo

(in effetti se io ho incollato le vere "coste" preservando l'orientamento il contributo del lavoro fatto sui pezzi che incollo si cancella

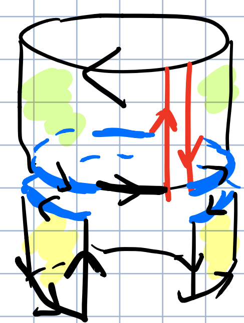


orientamento opposto sui due segmenti blu

allo stesso modo se incollo pezzi del bordo di un K_i in modo da preservare l'orientamento



orientamento opposto! sui due segmenti rossi



$\Sigma_1 = \varphi_1(K_1)$

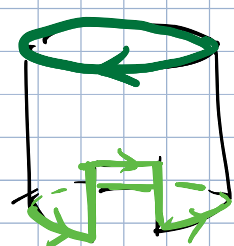
$\Sigma_2 = \varphi_2(K_2)$

$$\int_{\Sigma_1} \operatorname{rot} \bar{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\partial \Sigma_1} \bar{F} \cdot \hat{\tau} \, dl$$

$$\int_{\Sigma_2} \operatorname{rot} \bar{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\partial \Sigma_2} \bar{F} \cdot \hat{\tau} \, dl$$

dopo aver incollato

sommo viene



$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \bar{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\partial \Sigma} \bar{F} \cdot \hat{\tau} \, dl \quad \blacksquare$$

in verde il bordo di

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

2. Dati $a, b, c, d > 0$ is consideri

$$\mathcal{E} := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{w^2}{d^2} \leq 1\}$$

determinare la misura di $\mathcal{E}$:

$$|\mathcal{E}| := \int_{\mathcal{E}} dx dy dz dw$$

Suggerimento: Cambiare le variabili in modo da ridursi al caso $a = b = c = d$ (cioé la ipersfera)

Passo 1. mi riduco alla ipersfera

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x}{a} \\ y_1 = \frac{y}{b} \\ z_1 = \frac{z}{c} \\ w_1 = \frac{w}{d} \end{cases}$$

questo è un cambiamento di coordinate 1 a 1

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \Psi^{-1}(x, y, z, w)$$

$$\det J\Psi = abcd$$

$$\int_{\mathcal{E}} dx\,dy\,dz\,dw = \int_{B} abcd \; dx_1\,dy_1\,dz_1\,dw_1$$

dove $B : \{ x_1, y_1, z_1, w_1 \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 \leq 1 \}$

ora due possibilità:

1. Fubini (tolgo i pedici 1 e chiamo le variabili x, y, z, w)

$$B := \{ -1 \leq w \leq 1 \ ; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 - w^2 \}$$

$$\int_B dx\,dy\,dz\,dw = \int_{-1}^{1} dw \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1-w^2} dx\,dy\,dz$$

questa è la palla in $\mathbb{R}^3$ di raggio $r = \sqrt{1-w^2}$

il vol. è $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{4}{3}\pi \left(1-w^2\right)^{3/2} dw$$

provare a generalizzare a dim arbitraria!

$w = \cos\theta \qquad 0 < \theta < \pi$

$$= \frac{4}{3}\pi \int_0^\pi \sin^4(\theta)\, d\theta = \dots$$

2. Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x \quad r \sin\varphi \sin\theta \cos\psi \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \sin\psi \\ z = r \sin\varphi \cos\theta \\ w = r\cos\varphi \end{cases}$$

$0 < r < 1 \,;\; 0 < \psi < 2\pi \,;\; 0 < \theta < \pi ,\; 0 < \varphi < \pi$

scrivo la Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi \sin\theta\cos\psi & r\cos\varphi\sin\theta\cos\psi & r\sin\varphi\cos\theta\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\theta\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & r\cos\varphi\sin\theta\sin\psi & r\sin\varphi\cos\theta\sin\psi & r\sin\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\det J\psi| = r^3 \sin^2\varphi \sin\theta$$

faccio il determ. da questo rigo!

$$\int_0^1 r^3\,dr \int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta$$

3. Si considerino le forme differenziali

$$\omega_1(x,y,z) = x\ln(x^2+y^2)dx + (y\ln(x^2+y^2)+z)dy + ydz\,,$$

$$\omega_2(x,y,z) = x\ln(x^2+y^2)dx + (y\ln(x^2+y^2)+z)dy\,,$$

dire se tali forme sono esatte (nel loro dominio massimale di definizione) calcolare l'integrale di ω_1, ω_2 lungo l'arco di curva

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi/2, 2\pi]$$

Una primitiva per ω_1 è

$$f = \frac{(x^2+y^2)}{2}\left[\ln(x^2+y^2) - 1\right] + yz$$

$$\left[\frac{d}{dt}\, t(\ln t - 1) = \ln t\right]$$

(ω_1 è esatta)

$$\omega_2 = \omega_1 - y\,dz \qquad (\omega_2 \text{ Non è chiusa})$$

$$\int_\gamma \omega_1 = f(2\pi, 0, 4\pi^2) - f\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma \omega_1 - \int_\gamma y\,dz = \int_\gamma \omega - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} t \sin t \cdot 2t\,dt$$

4. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x}{(1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}}dx + \frac{1}{2(1+x^2+y)\sqrt{x^2+y}}dy$$

determinare il dominio di definizione massimale e dire se è semplicemente connesso.

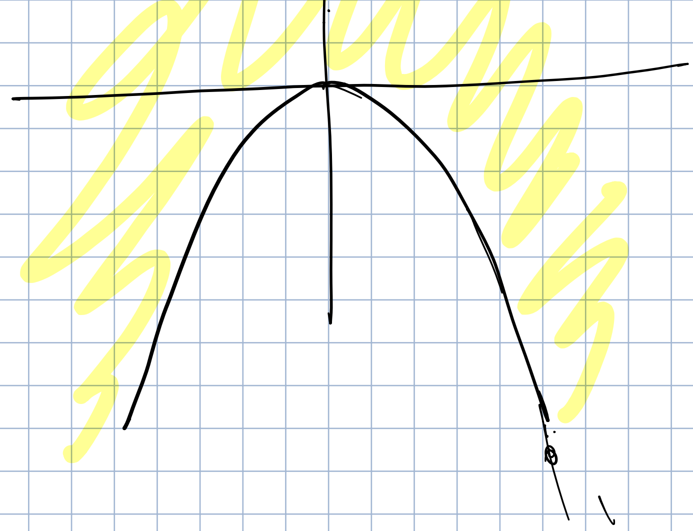
(a) Stabilire se ω è chiusa e/o esatta.

(b) Sia ψ una curva che percorre l'arco di parabola di equazione $y = 3 - 3x^2$ dal punto $A = (0,3)$ al punto $B = (1,0)$. Calcolare l'integrale di ω lungo ψ.

Domanda aggiuntiva: determinare (se esiste) una primitiva per ω.

ω è definita purché $x^2 + y > 0$

questo è un



dominio semplicem. connesso quindi se ω è chiusa è anche esatta

facendo i conti ω è chiusa

del resto se pongo $g(x,y) = x^2+y$

$$\omega = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{\partial g}{\partial x}\,dx}{[1+g(x,y)]\sqrt{g(x,y)}} + \frac{\frac{\partial g}{\partial y}\,dy}{[1+g(x,y)]\sqrt{g(x,y)}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(1+g(x,y))\sqrt{g(x,y)}}\,d\,g(x,y)$$

quindi ponendo $t = g(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{g(x,y)} \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$$

si ottiene una primitiva

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2+y}$$

$$\int_{\gamma} \omega = f(1,0) - f(0,3) .$$