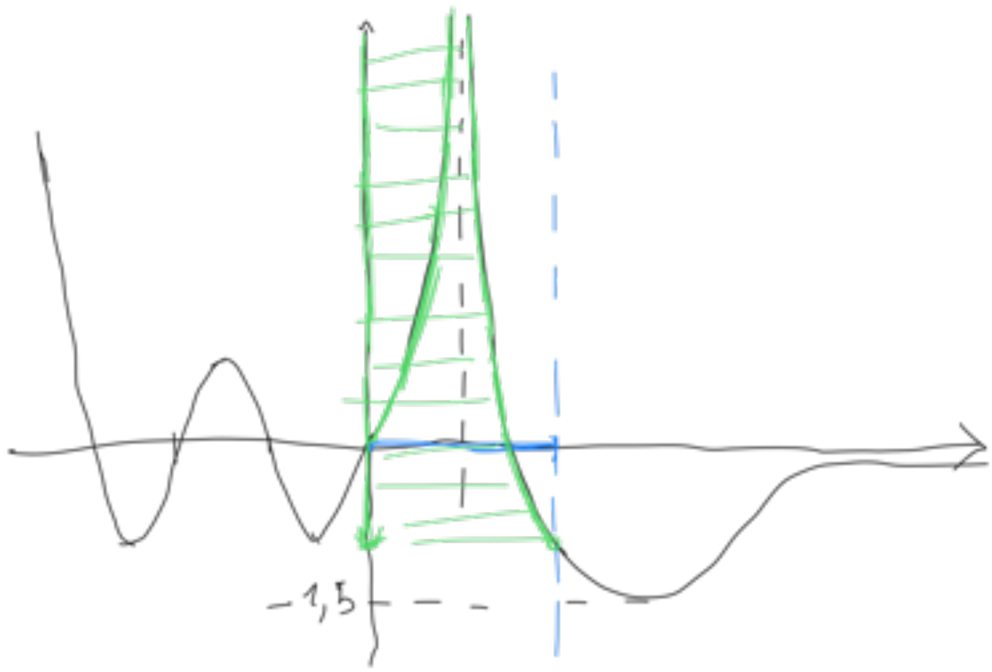
Esercizio 1



Dominio $\mathbb{R}/\{1\}$

il punto $x=1$ è un asintoto verticale e $\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \infty$

L'immagine sono tutti i valori y che può assumere la funzione. quindi $[-1,5, \infty)$. Infatti se traccio una qualsiasi retta orizzontale di quota $y \in [-1,5, \infty)$ ci sono intersezioni con il grafico.

l'immagine di $(0,2)$ è $(-1, \infty)$
[IN VERDE SUL GRAFICO]
Si tratta di tutti i possibili valori di $f(x)$ quando $x \in (0,2)$
In verde è segnata la parte del grafico di $f(x)$ con $x \in (0,2)$
La risposta è la proiezione

sulle ordinate di tale parte di grafico.

Esercizio 2.

$f(x) = \ln(x^2 + 6x + 5)$

Dominio $x \mid x^2 + 6x + 5 > 0$

quindi $x < -5$ e $x > -1$

$f(x) > 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 > 1 \Rightarrow x^2 + 6x + 4 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{1} = -3 \pm \sqrt{5}$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln(x^2 + 6x + 5) = \ln(\infty) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 6x + 5) = \ln(\infty) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2 + 6x + 5)}{x^2} = 0$$

Per la gerarchia degli infiniti

Infatti $\ln(x^2 + 6x + 5) \sim 2\ln(x)$ per $x \to \infty$ e $2\ln(x) << x^2$ per $x \to \infty$.

Altrimenti col teorema de l'Hopital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2 + 6x + 5)}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x+6}{x^2+6x+5}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x+6}{2x \cdot (x^2 + 6x + 5)} = 0 .$$

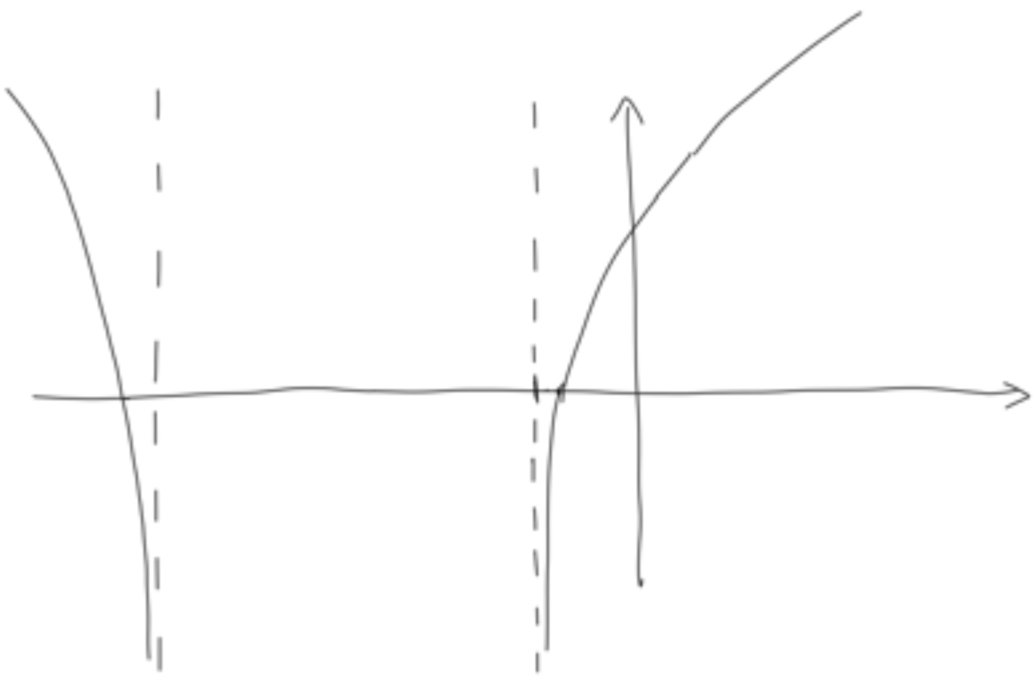
$$f'(x) = \frac{2x+6}{x^2+6x+5}$$

Studio il segno $\quad x^2+6x+5>0 \Rightarrow x \in D$

$2x+6>0 \Rightarrow x>-3$

Quindi per $x \in D$ $f(x)$ è crescente per $x>-1$ e decrescente per $x<-5$

NON CI SONO PUNTI CRITICI



Esercizio 3.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+2^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+1}$$

cambio le variabili $y = \frac{x}{2}+1$

$$dy = \frac{dx}{2} \Rightarrow dx = 2dy$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \frac{2}{4}\int \frac{dy}{y^2+1}\Bigg|_{y=\frac{x}{2}+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}+1\right)+c$$