Esercitazione per l'esonero: 8-1-2020

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

2. Trovare il massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) := x^6 - y^8 + 3y^2$$

sul vincolo $|x|^3 + y^4 = 1$.
Domanda supplementare: Stessa domanda, stesso vincolo ma per la funzione

$$g(x,y) := x^6 - y^8 + 2y^4$$

1. Si consideri il dominio

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^4 + y^4 - 4x^2y^2 = 1\}$$

Si discuta se tale dominio sia o meno compatto. Trovare eventuali massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2y^2$$

su D.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \cos(t) \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

4. Data l'equazione differenziale

$$y' = 2\sqrt{y}e^{-\sqrt{y}}, \qquad \text{dove } y = y(t) \text{ con } t \in (0, +\infty),$$

(a) si determini la soluzione $y = y(t)$ al problema di Cauchy con dato iniziale $y(1) = 1$,

(b) si determini una soluzione al problema di Cauchy con dato iniziale $y(1) = 0$. Si discuta l'unicità di tale soluzione.

Il vincolo $|x|^3 + y^4 = 1$ è

un compatto infatti $|x|^3 + y^4 = 1$

$\Rightarrow$ $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$

sul vincolo $f(x,y)$ coincide con

$$G(y) = (1-y^4)^2 - y^8 + 3y^2 \Rightarrow$$

$$= 1 - 2y^4 + 3y^2$$

$$\mathcal{L}(x,y) = 1 - 2y^4 + 3y^2 - \lambda\left(|x|^3 + y^4 - 1\right)$$

$(\text{per } x \neq 0)$ applico molt. Lagrange

$$\begin{cases} -8y^3 + 6y - 4\lambda y^3 = 0 \\ 3\lambda x^2 \operatorname{sign}(x) = 0 \\ |x|^3 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$\lambda = 0$ $\quad y = 0$; $x = \pm 1$

$\lambda = 0$ $\quad y^2 = \frac{3}{4}$ $\quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x = \pm \sqrt[3]{1 - \frac{9}{16}}$

resta da considerare $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

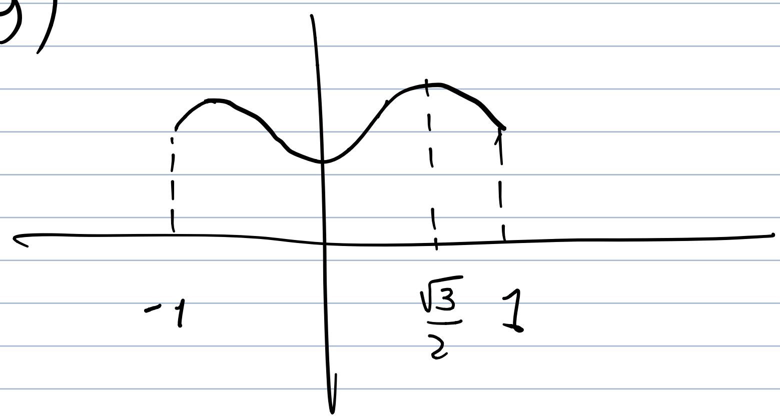
$$G(0) = \boxed{1} \Rightarrow \text{MIN}$$

Max

$$G\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - 2\left(\frac{9}{16}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right) = 1 + \frac{9}{8} = \boxed{2 + \frac{1}{8}}$$

$$G(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

si poteva notare direttamente vedendo che sul vincolo y assume tutti i valori tra $-1 \leq y \leq 1$ e disegnando $G(y)$



ATTENZIONE:

ovviamente eventuali altri punti di MAX o MIN di $G(y)$ fuori dall' intervallo $[-1, 1]$ NON interessano. (NON SODDISFANO IL VINCOLO $|x|^3 + y^4 = 1$!

1. Si consideri il dominio

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^4 + y^4 - 4x^2y^2 = 1\}$$

Si discuta se tale dominio sia o meno compatto. Trovare eventuali massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2y^2$$

su D.

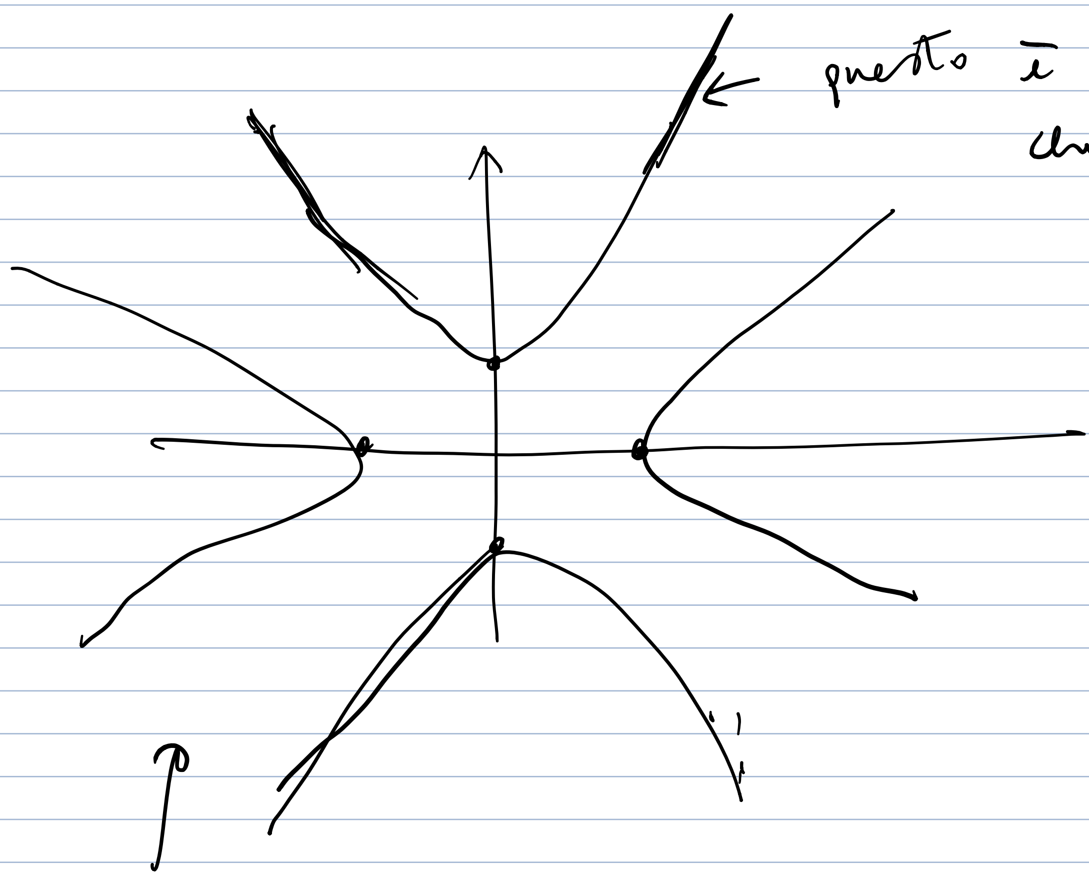
Non è compatto (posso esplicitare $y = g(x)$)

$$y^4 - 4x^2y^2 + x^4 - 1 = 0 \implies$$

$$y^2 = 2x^2 \pm \sqrt{4x^4 - x^4 + 1} = 2x^2 \pm \sqrt{3x^4+1}$$

per esempio $y(x) = \sqrt{2x^2 + \sqrt{3x^4+1}}$

le coppie $(x, y(x)) \to \infty$



questo è il ramo che ho esplicitato

(Disegno (approx. di D))

$$f(x,y)\Big|_D = 1+4x^2y^2 - x^2y^2 = 1+3x^2y^2$$

$1+3x^2y^2 \geq 1$ il minimo si

ha se $xy=0$ $\Rightarrow$

CERCO punti sul vincolo t.c. $xy=0$

$$\begin{cases} y^4+x^4-4x^2y^2-1=0 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (0,\pm 1);\ (\pm 1,0)$$

NON c'è un max.

infatti l'estremo superiore è $=+\infty$

per vedere questo

Basta sostituire $y=\sqrt{2x^2+\sqrt{3x^4+1}}$ e

ae $\lim_{x\to+\infty}$)

$$\lim_{x\to\infty} 1+3x^2\sqrt{2x^2+\sqrt{3x^4+1}} = +\infty$$

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \cos(t) \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

Soluzioni omogenee $x_1(t) = e^t \cos t$

$x_2(t) = e^t \sin t$

Non omogenee

$x_0(t) = a \cos t + b \sin t$

$+ a \cos t + b \sin t - 2a \sin t + 2b \cos t = \cos t$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ b - 2a = 0 \end{cases} \qquad 5a = 1 \quad = \quad a = \frac{1}{5}$$

$$b = \frac{2}{5}$$

$$x(t) = \frac{1}{5}(\cos t + 2 \sin t) + \mu_1 e^t \cos t + \mu_2 e^t \sin t$$

$$x(0) = 1 \quad = \quad \frac{1}{5} + \mu_1 = 1$$

$$x'(t) = \frac{1}{5}(-\sin t + 2\cos t) + \mu_1 e^t \cos t - \mu_1 e^t \sin t$$
$$+ \mu_2 e^t \sin t + \mu_2 e^t \cos t$$

$$\dot{x}(0) = \frac{2}{5} + \mu_1 + \mu_2 = 0$$

$$\mu_1 = \frac{4}{5} \qquad \mu_2 = -\frac{6}{5}$$

$$x(t) = \frac{1}{5}\left(\cos t + 2\sin t + 4e^t \cos t - 6e^t \sin t\right)$$

4. Data l'equazione differenziale

$$y' = 2\sqrt{y}e^{-\sqrt{y}}, \qquad \text{dove } y = y(t) \text{ con } t \in (0, +\infty),$$

(a) si determini la soluzione $y = y(t)$ al problema di Cauchy con dato iniziale $y(1) = 1$,

(b) si determini una soluzione al problema di Cauchy con dato iniziale $y(1) = 0$. Si discuta l'unicità di tale soluzione.

se $y(1) \neq 0$

$$\frac{\dot{y}}{2\sqrt{y}} e^{\sqrt{y}} = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$\int_{y(1)}^{y} dz \, \frac{e^{\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}} = t - 1$$

$$w = \sqrt{z} \qquad dw = \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$$

$$\int_{\sqrt{y(1)}}^{\sqrt{y}} e^{w}\, dw = t-1$$

$$e^{\sqrt{y}} - e^{\sqrt{y(1)}} = t-1$$

$$\sqrt{y} = \log\left(t-1+e^{\sqrt{y(1)}}\right)$$

$$y = \left(\log\left(t-1+e^{\sqrt{y(1)}}\right)\right)^2$$

(ben definito purché $t > 1-e^{\sqrt{y(1)}}$)

consideriamo il caso $y(1)=0$

il cambiamento di coord $w=\sqrt{z}$

NON è differenziabile in $z=0$

(la formula $dw = \dfrac{dz}{2\sqrt{z}}$ ha

una singolarità)

① (Vedere appunti sep. variabili)

una soluzione è $y(t)=0 \quad \forall t \in (0,\infty)$

② una soluzione (DIVERSA)

si trova usando la formula di

separazione di variabili con $y(1)=0$

[cioé svolgendo l'integrale IMPROPRIO]

$$\int_0^{\sqrt{y}} \frac{dz}{2\sqrt{z}}\, e^{z} = t-1$$

$$\checkmark \qquad y = \begin{cases} (\log t)^2 & \text{se } t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$