La formula di Stirling (Dimostrazione presa dalle dispense di analisi di L. Chierchia)

May 24, 2019

La Formula di Stirling ci dice che

$$n! = n^n e^{-n}(\sqrt{2n\pi} + \alpha_n)\,, \quad |\alpha_n| \leq 2$$

Quindi dobbiamo stimare

$$\alpha_n := n! e^n n^{-n} - \sqrt{2n\pi}.$$

Ricordiamo la formula (si verifica integrando per parti)

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}$$

Applichiamo il cambiamento di variabile $x = z + n$ da cui

$$n! = n^n e^{-n} \int_{-n}^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z} dz = \int_{-n}^0 \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z} dz + \int_0^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z} dz$$

adesso poniamo

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z} \equiv \exp(n \ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) - z) := e^{-t^2}$$

piu' precisamente per $-n < z < 0$ poniamo

$$t_-(z) := -\sqrt{n \ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) - z}$$

e per $0 < z < \infty$ poniamo

$$t_+(z) := \sqrt{n \ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) - z}.$$

Si noti che

$$d_z t_\pm(z) = \frac{z}{2(z+n)} \frac{\pm 1}{\sqrt{n \ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) - z}} = \frac{1}{2} \frac{z}{(z+n) t_\pm(z)}$$

é positivo nel dominio di definizione. Questo vuol dire che posso invertire $t_\pm(z)$. Per esempio $t_-(z)$ é una funzione strettamente crescente da $(-n,0)$ in $(-\infty,0)$ indico la sua inversa come $z_-(t)$. La derivata della funzione inversa é:

$$d_t z_-(t) = 2t(1+\frac{n}{z_-(t)})\,,$$

lo stesso vale per $z_+(t)$. Ora cambiamo le variabili nell'integrale:

$$n! = n^n e^{-n}\left(\int_{-\infty}^0 2t(1+\frac{n}{z_-(t)})e^{-t^2}dt + \int_0^\infty 2t(1+\frac{n}{z_+(t)})e^{-t^2}dt\right).$$

e ricordiamo che

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

quindi

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^0 2t(1+\frac{n}{z_-(t)})e^{-t^2}dt + \int_0^\infty 2t(1+\frac{n}{z_+(t)})e^{-t^2}dt - \sqrt{2n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

che si puó riscrivere come

$$\int_{-\infty}^0 \left(2t(1+\frac{n}{z_-(t)}) - \sqrt{2n}\right)e^{-t^2}dt + \int_0^\infty \left(2t(1+\frac{n}{z_-(t)}) - \sqrt{2n}\right)e^{-t^2}dt.$$

Definisco

$$2t(1+\theta_\pm(t)) = 2t(1+\frac{n}{z_-(t)}) - \sqrt{2n}\,,$$

voglio mostrare che $-1 < \theta_\pm(t) < 0$. Per far questo ritorno nelle variabili z:

$$\theta_\pm(z) = \frac{n}{z} - \sqrt{\frac{n}{2(n\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) - z)}} = \frac{n}{z} - \sqrt{\frac{1}{2(\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n})}}$$

e noto che (sto ponendo $y = z/n$)

$$-1 < \frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{2(\ln(1+y) - y)}} < 0\,, \quad -1 < y < \infty$$

Segue che

$$\begin{aligned}|\alpha_n| &\leq \int_{-\infty}^0 2|t||1+\theta_-(t)|e^{-t^2}dt + \int_0^\infty 2|t||1+\theta_+(t)|e^{-t^2}dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} 2|t|e^{-t^2}dt = 2\end{aligned}$$