

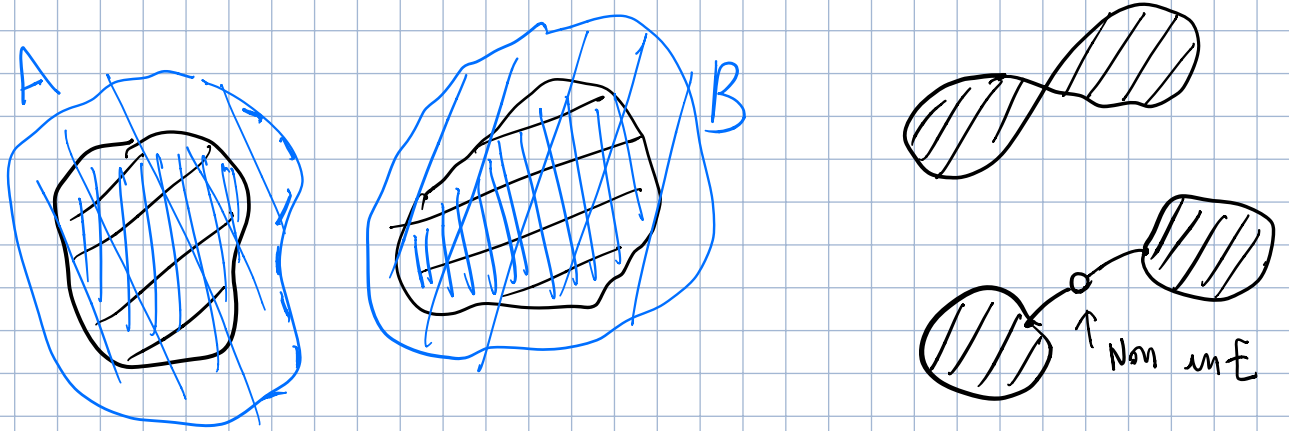
CONNESSIONE

6 Connessione

Un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n si dice **sconnesso** (o "non connesso") se esistono due insiemi aperti A e B tali che se $A_E := A \cap E$ e $B_E := B \cap E$ allora

$$A_E \neq \emptyset, \quad B_E \neq \emptyset, \quad A_E \cap B_E = \emptyset, \quad E = A_E \cup B_E; \quad (1.31)$$

e diremo che A e B sconnettono E . Un insieme è **connesso** se non è sconnesso.



La connessione è un invariante topologico:

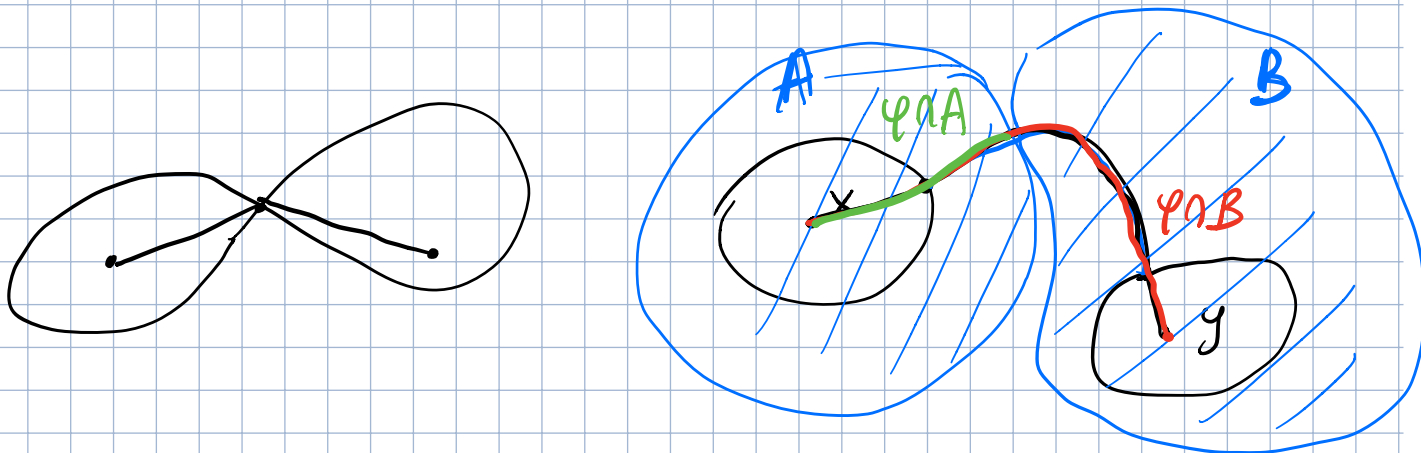
Proposizione 1.23 Se E è connesso e f è continua su E allora $f(E)$ è connesso.

le curve regolari sono connesse
 $i=1$

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **connesso per curve** (rispettivamente, "per poligonali") se per ogni $x, y \in E$, esiste una curva (rispettivamente, "una poligonale") di estremi x e y tutta contenuta in E .

→ **Proposizione 1.24** (i) Un insieme di \mathbb{R}^n connesso per curve è connesso.
(ii) Un insieme aperto di \mathbb{R}^n connesso è connesso per poligonali.

Per dimostrare la parte (ii) della Proposizione 1.24 avremo bisogno del seguente lemma



(1) Se fosse falso \Rightarrow anche le curve che va da x a y sarebbe disconnesse

me tale curva è l'immagine di un intervallo tramite una funzione continua, quindi deve essere connessa!

(ii) Per esercizio

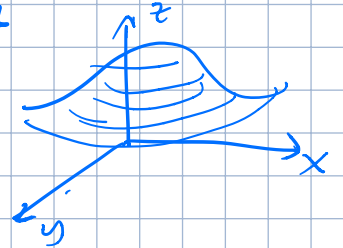
Superfici

Vogliamo descrivere un oggetto bidimensionale

almeno che vive in uno spazio \mathbb{R}^n $n \geq 3$

(per esempio il grafico di una

funzione $(x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{C}^1$
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



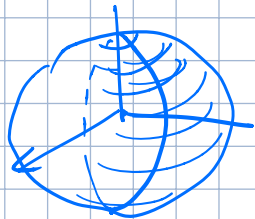
[Rem. il grafico sono i punti $(x, y, f(x, y))$]

Altro esempio la sfera unitaria in \mathbb{R}^3

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

(Per il teorema f. implicita S^2 localmente

è il grafico di una funzione



Come nel caso delle curve vogliamo dare una def "parametrica"

Domini connessi K in \mathbb{R}^2

Considero K chiuso e connesso

t.c. $\overline{K} = K$

$K^\circ \Rightarrow$ interno

$\overline{K} \Rightarrow$ chiusura

(K è la chiusura del suo interno)

(Voglio evitare che K ne abbia forme



Quasi sempre K è un rettangolo!

N.B. K è connesso per poligoni!

(Elementi di) Superficie regolare (parametrica)

$$\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, v) \\ \varphi_2(u, v) \\ \varphi_3(u, v) \end{pmatrix}$$

① $\varphi \in C^1(K)$

RETT. $C^1(K)$ con K chiuso vuol dire che la funzione $\varphi \in C^1(A)$ con A aperto $K \subseteq A$.

② $\varphi \in$ iniettiva su K

③ $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq \vec{0}$ (Riguardare la def. di prodotto \wedge in \mathbb{R}^3)

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} x_u(u, v) \\ y_u(u, v) \\ z_u(u, v) \end{pmatrix}$$

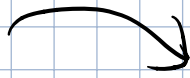
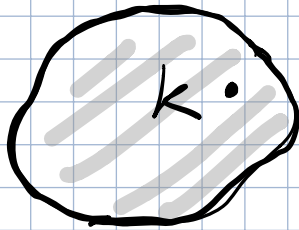
$$x_u = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \text{ etc.}$$

uguale per $\varphi_v = \begin{pmatrix} x_v(u, v) \\ y_v(u, v) \\ z_v(u, v) \end{pmatrix}$

L'immagine $\varphi(K)$ si chiama SOSTEGNO delle superfici (spesso SOLO superficie)

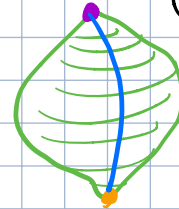
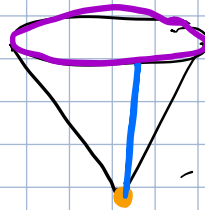
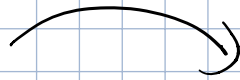
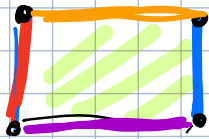
N.13

$\varphi(k)$ è connessa (per curve)



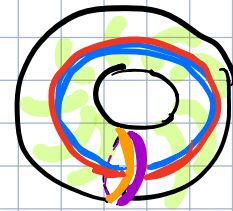
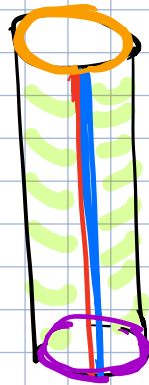
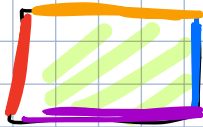
questo è
iniettiva
anche sul
bordo

incollo lungo i bordi



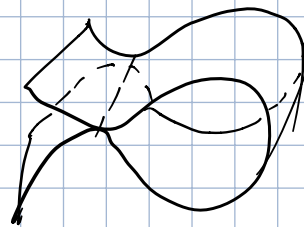
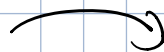
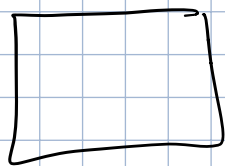
(un cilindro)

incollo tutti i lati



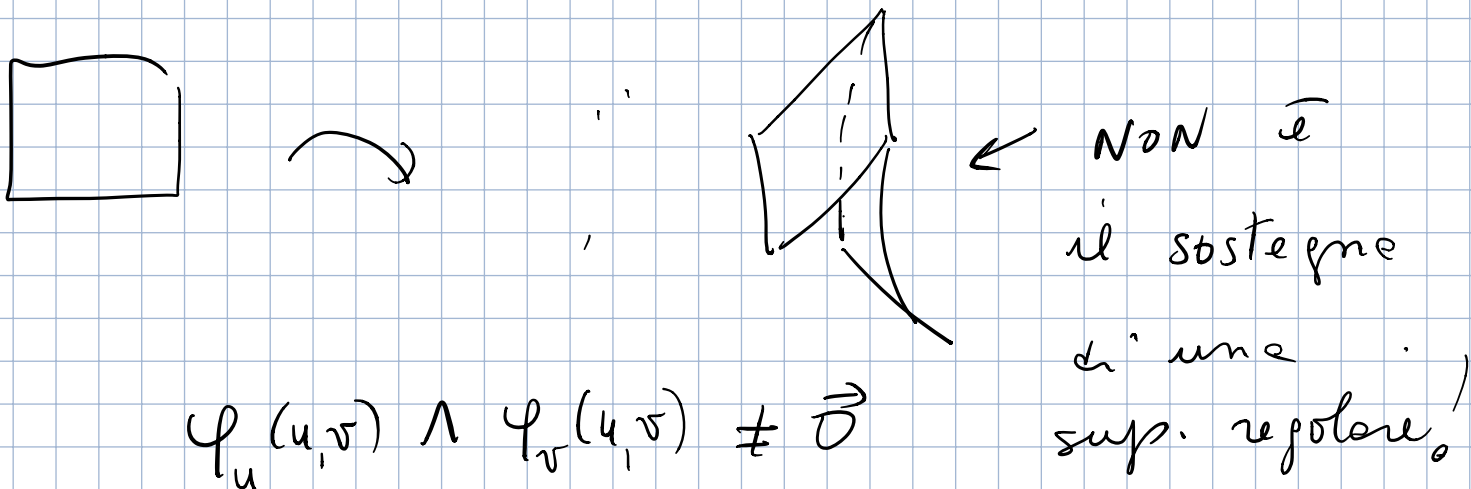
una ciambella
(Toro)

La condizione di iniettività in k°
vuole evitare intersezioni del
-lapo



La condizione $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq \vec{0}$ garantisce

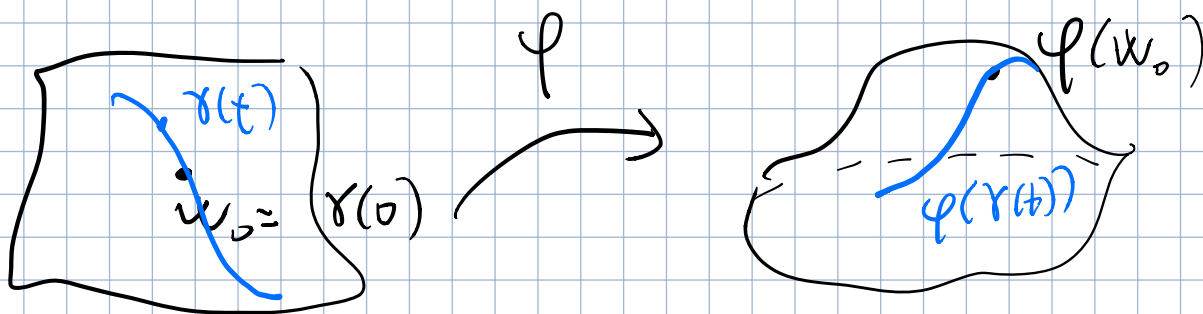
e l'esistenza del PIANO TANGENTE



$$\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v) \neq \vec{0}$$

Per dimostrare che su ogni punto di $\varphi(K)$ esiste il piano tangente

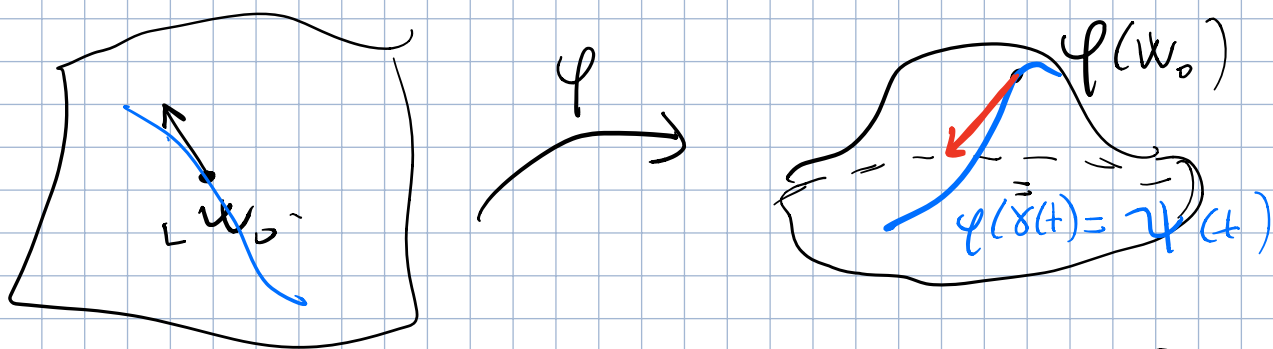
fissiamo $w_0 = (u_0, v_0) \in K$



disegniamo una curva regolare $[-1, 1] \rightarrow K$

t.c. $\gamma(0) = w_0$

$$t \rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$



$\psi = \varphi(\gamma(t))$ è una curva in \mathbb{R}^3

è un vettore tangente \bar{e}

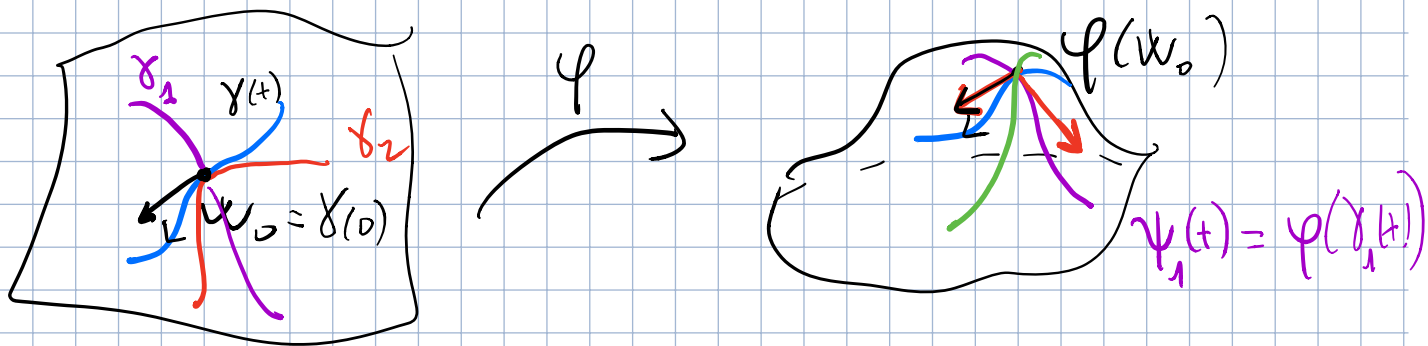
$$\psi'(t) = \varphi_u(\gamma(t)) \dot{u}(t) + \varphi_v(\gamma(t)) \dot{v}(t)$$

quindi in $t=0$ $\psi'(0) = \varphi_u(w_0) \dot{u}(0) + \varphi_v(w_0) \dot{v}(0)$

N.B. $\varphi_u(w_0)$ e $\varphi_v(w_0)$ NON dipendono da γ !

$\psi'(0)$ è combinazione lineare di $\varphi_u(w_0)$ e $\varphi_v(w_0)$

Se prendo un'altra curva $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}$ che passa per w_0 a $t=0$



di nuovo $\psi_1'(0) = \varphi_u(w_0) \dot{u}_1 + \varphi_v(w_0) \dot{v}_1$

Quindi per tutte le curve di \mathbb{R}^3 contenute sul sostegno della superficie $\varphi(k)$ e passanti per il punto $\varphi(w_0)$

il vettore tangente \bar{e} contenuto
 in $\text{Span}(\varphi_u(w_0), \varphi_v(w_0))$

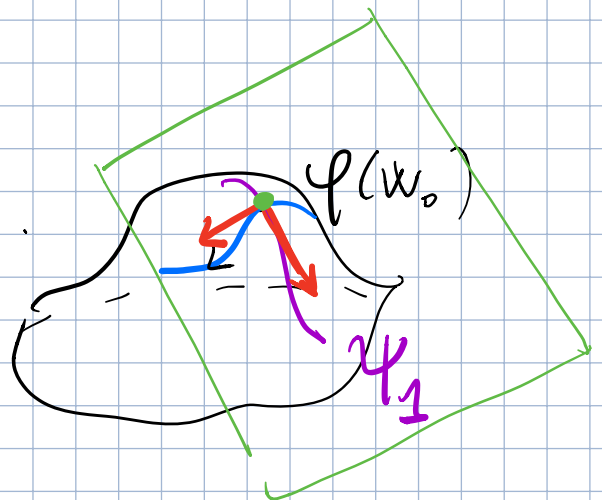
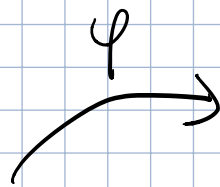
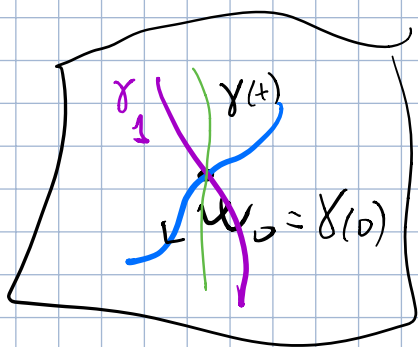
se $\varphi_u(w_0)$ non è parallelo a $\varphi_v(w_0)$

tale spazio ha dimensione 2 e

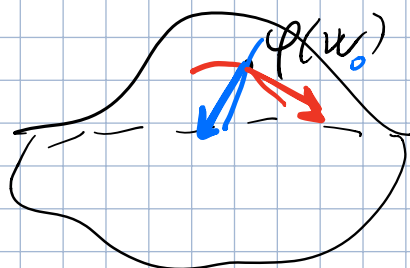
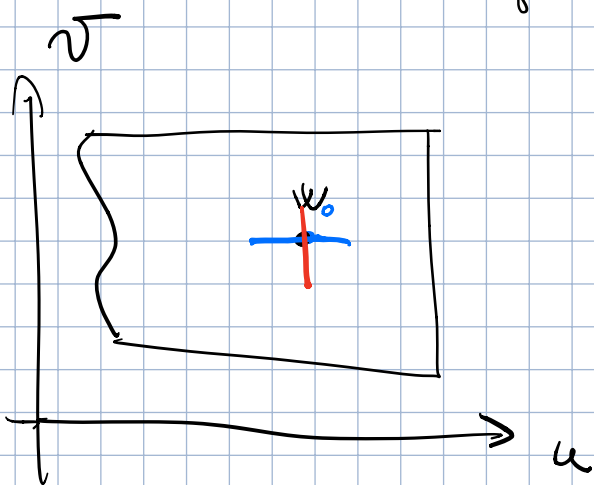
è lo spazio AFFINE

$$\varphi(w_0) + \text{Span}(\varphi_u(w_0), \varphi_v(w_0)) \bar{e}$$

il piano TANGENTE



Il significato di φ_u, φ_v



Il segmento orizzontale BLU mi

disegna su $\varphi(k)$ una curva il cui
tangente è φ_u . Il segmento verticale ROSSO

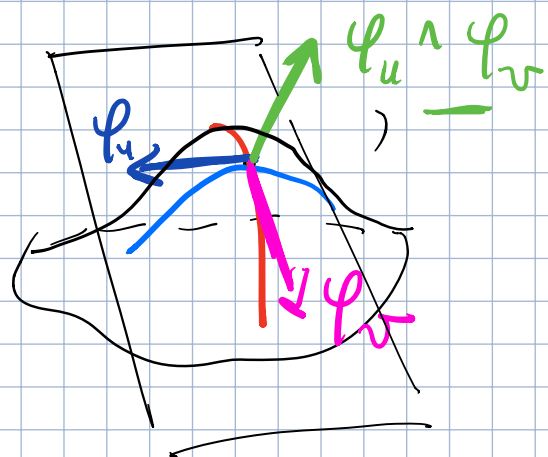
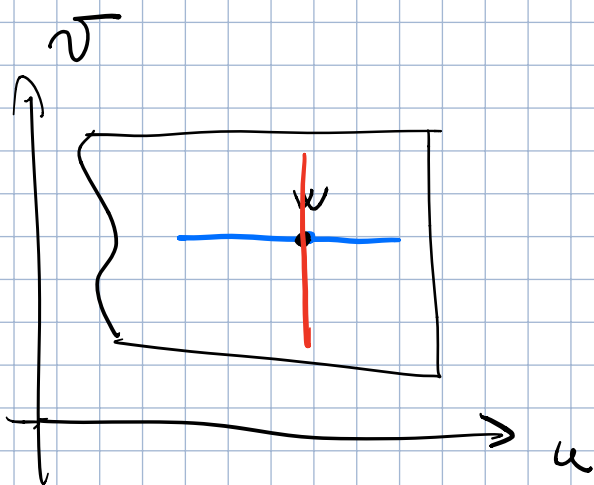
è una curva il cui vettore tg. è φ_v

o.e. $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq \vec{0}$ garantisce

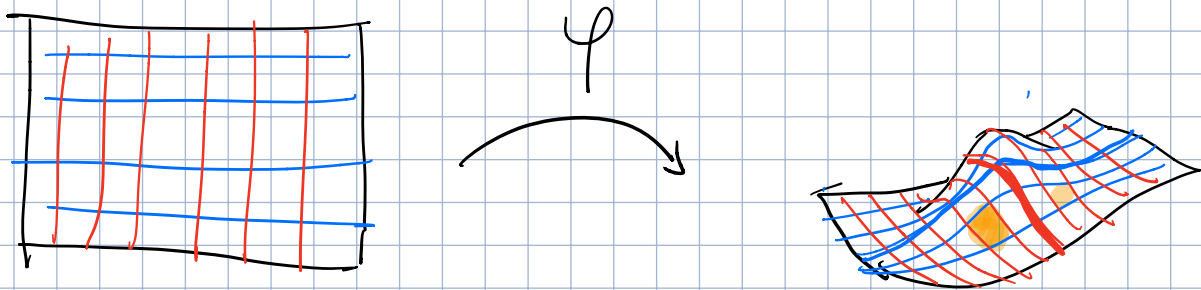
① che $\dim(\text{Span}(\varphi_u, \varphi_v)) = 2$

② che le curve blu e le curve
rosse sono sempre trasverse

il vettore $\varphi_u \wedge \varphi_v$ è ortogonale al
piano tangente.

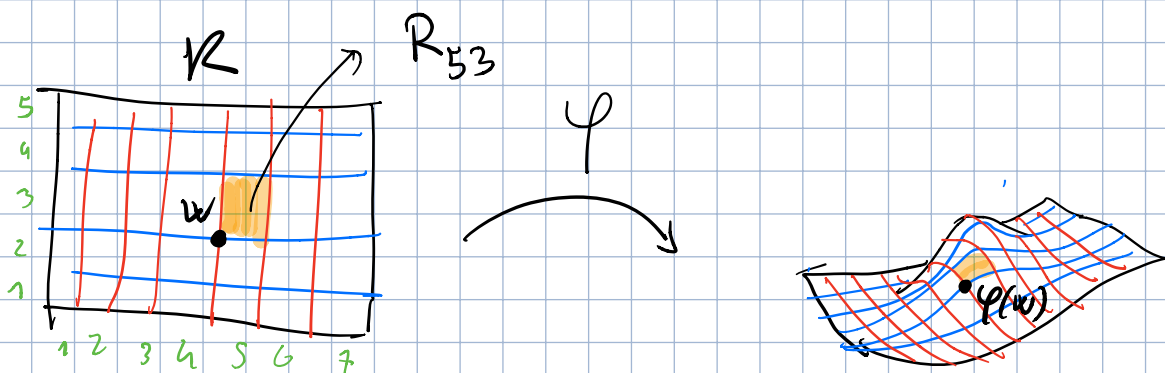


piú in generale posso fare una
griglia su K

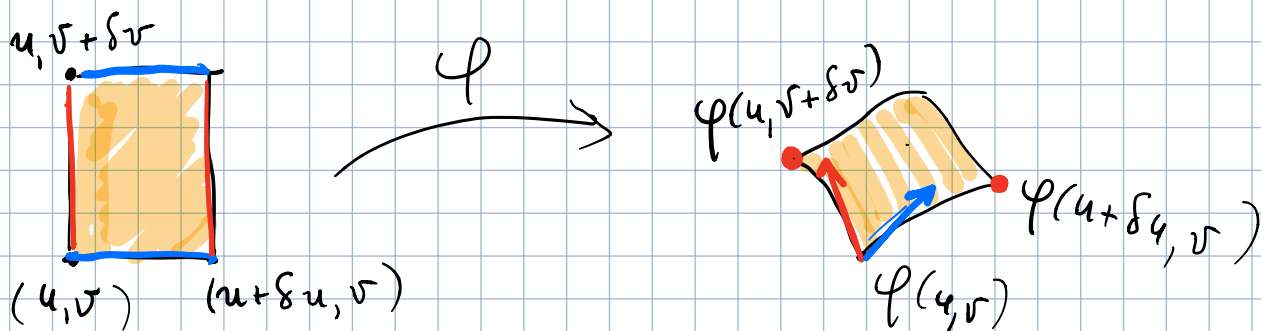


Questo dà una buona immagine della superficie
e dà una idea intuitiva per calcolare
l'area superficiale di $\varphi(K)$

Immaginiamo di fare una griglia MOLTO FINA
che corrisponde a una PARTIZIONE in rettangoli



Ho segnato il rettangolo R e la sua immagine $\varphi(R)$ sulla superficie $w = (u, v)$ [INGRANDISCO]



il vettore rosso $\vec{e}_v = \varphi_v(u, v)$ il vettore BLU $\vec{e}_u = \varphi_u(u, v)$ (sono vettori in \mathbb{R}^3)

Per il teorema di Lagrange

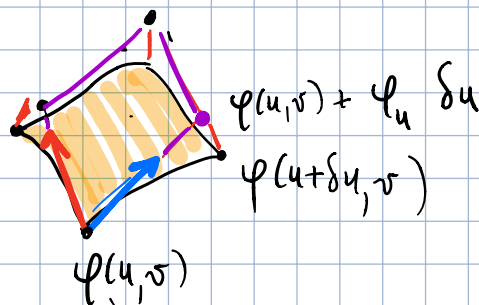
$$\varphi(u + \delta u, v) = \varphi(u, v) + \varphi_u(u, v) \delta u + o(|\delta u|)$$

$$\varphi(u, v + \delta v) = \varphi(u, v) + \varphi_v(u, v) \delta v + o(|\delta v|)$$

l'area di $\varphi(R)$ è vicina all'area del parallelogrammo

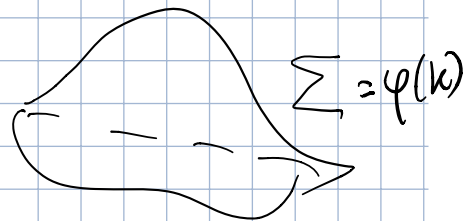
tale area vale

$$|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \delta u \delta v$$



$$A(\varphi(K)) \approx \sum_{ij} |\varphi_u \wedge \varphi_v| \delta u \delta v = \sum_{ij} |\varphi_u \wedge \varphi_v| |R_{ij}|$$

quindi è NATURALE DEFINIRE



$$A(\varphi(K)) := \int_K |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv$$

questa def. è INTRINSECA

CAMBI DI PARAMETRIZZAZIONE

Anche per le superfici posso definire due parametrizzazioni equivalenti

dati: K, K_1 domini connessi di \mathbb{R}^2

e sia p una mappa 1 a 1 $K_1 \rightarrow K$, C^1

e localmente invertibile $(u_1, v_1) \rightarrow (u, v) = p(u_1, v_1)$

data $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie regolare

definisco $\psi(u_1, v_1) = \varphi(p(u_1, v_1))$ [DISEGNO?]

(questa è una parametrizzazione equivalente)
per il sostegno della superficie

$$u = u(u_1, v_1)$$

$$v = v(u_1, v_1)$$

$$\psi(u_1, v_1) = \varphi(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1))$$

$$\psi_{u_1} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial u_1} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial u_1}$$

$$\psi_{v_1} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial v_1} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial v_1}$$

quindi $\psi_{u_1} \wedge \psi_{v_1} =$

$$\left(\varphi_u \frac{\partial u}{\partial u_1} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial u_1} \right) \wedge \left(\varphi_u \frac{\partial u}{\partial v_1} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial v_1} \right) =$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v \frac{\partial u}{\partial u_1} \frac{\partial v}{\partial v_1} + \varphi_v \wedge \varphi_u \frac{\partial v}{\partial u_1} \frac{\partial u}{\partial v_1} =$$

$$(\varphi_u \wedge \varphi_v) \left(\frac{\partial u}{\partial u_1} \frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial v}{\partial u_1} \frac{\partial u}{\partial v_1} \right) = (\varphi_u \wedge \varphi_v) (\det J_P)$$

infatti $P: \begin{cases} u = u(u_1, v_1) \\ v = v(u_1, v_1) \end{cases}, J_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{pmatrix}$

$$\psi_{u_1} \wedge \psi_{v_1} = (\varphi_u \wedge \varphi_v) (\det J_P)$$

scrivendo per esteso tutte le variabili:

$$|\psi_{u_1}(u_1, v_1) \wedge \psi_{v_1}(u_1, v_1)| = |\varphi_u(P(u_1, v_1)) \wedge \varphi_v(P(u_1, v_1))| |\det J_P(u_1, v_1)|$$

CALCOLIAMO l'area usando ψ

$$\int_{K_1} |\psi_{u_1} \wedge \psi_{v_1}| du_1 dv_1 = \int_{P^{-1}(K)} |\varphi_u \wedge \varphi_v| \underbrace{|\det J_P|}_{du dv} du_1 dv_1$$

$$= \int_K |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv =:$$

LA DEFINIZIONE di AREA NON dipende dalla parametrizzazione!

Spero si indici il sostegno delle sup. con Σ
 dS l'elemento di area

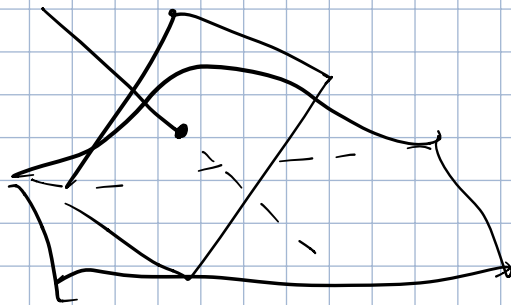
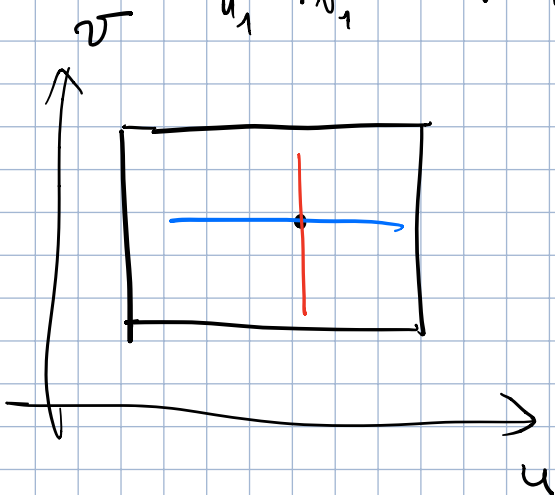
$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} dS = \int_K |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv \quad \left(\begin{array}{l} \text{per una} \\ \text{qualsiasi} \\ \text{PARAMETRIZZAZIONE} \\ \varphi! \end{array} \right)$$

della stessa formula si vede che il vettore NORMALE a Σ in un punto

$$\hat{n} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$$

può al + cambiare di SEGNO al variare della Parametrizzazione!

$$\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{v_1} = \varphi_u \wedge \varphi_v \cdot \det J_P$$



in effetti solo la direzione \perp è intrinseca

Esempio:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x(u, v) = \cos u & u \in [0, 2\pi] \\ y(u, v) = \sin u & v \in [0, 1] \\ z(u, v) = v \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x(u, v) = \cos u \sin v & u \in [0, 2\pi] \\ y(u, v) = \sin u \sin v & v \in [0, \pi] \\ z(u, v) = \cos v \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x(u, v) = v \cos u & u \in [0, 2\pi] \\ y(u, v) = v \sin u & v \in [0, 1] \\ z(u, v) = v \end{cases}$$

$\textcircled{4}$ Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1

$$[u, v] \rightarrow \varphi \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = f(u, v) \end{cases}$$

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}$$

$$\varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix}$$

$$-f_u \underline{i} - f_v \underline{j} + \underline{k}$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

$$A = \int_K \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv$$

⑤ Superfici di rotazione: $a \leq u \leq b$
 $0 \leq v \leq 2\pi$

$$\begin{cases} x(u, v) = f(u) \cos v \\ y(u, v) = f(u) \sin v \\ z(u, v) = u \end{cases}$$

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} f'(u) \cos v \\ f'(u) \sin v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_v = \begin{pmatrix} -f(u) \sin v \\ f(u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{j} & \underline{k} \\ f'(u) \omega & f'(u) \eta & 1 \\ f(u) \omega & f(u) \eta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= f(u) \omega(v) \underline{1} + f(u) \eta(v) \underline{j} + f'(u) f(u) \underline{k}$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = f(u) \sqrt{(1 + (f'(u))^2)}$$

$$A(S) = \int_K f(u) \sqrt{(1 + (f'(u))^2)} du dv =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{(1 + (f'(u))^2)} du$$