

Tutorato 1 AM220

DOCENTE: MICHELA PROCESI

TUTORE: BRUNO RENZI

DATA: 2/03/2020

Esercizio 1. Scrivere, quando possibile, i seguenti domini in forma normale rispetto agli assi cartesiani:

- (a) La regione $D \subset \mathbb{R}^2$ compresa tra la retta $\{y = x\}$ e la parabola $\{x = y^2\}$
- (b) La regione $E \subset \mathbb{R}^2$ compresa tra le rette $\{y = x\}$, $\{y = x/2\}$, $\{y = 1\}$, $\{y = 0\}$
- (c) La regione $V \subset \mathbb{R}^3$ compresa delimitata dai coni $\{x^2 + y^2 = z\}$ e $\{z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$
- (d) La regione $W \subset \mathbb{R}^3$ data dall'unione del cilindro $\{x^2 + y^2 \leq 3, z \in [\sqrt{3}, 5]\}$ e della sfera $\{x^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 \leq 3\}$

Esercizio 2. Calcolare gli integrali delle seguenti funzioni sui domini indicati:

- (a) $f(x, y) = \frac{x}{y+1}$ $D = \{x \in [0, 1], y \in [x^2, x]\}$
- (b) $f(x, y) = \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}$ $D = \{x \in [0, 1], y \in [\sqrt{x}, 1]\}$
- (c) $f(x, y) = xy$ $D = \{x + y \leq 1, x, y \in [0, +\infty)\}$
- (d) $f(x, y) = xy$ $D = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$
- (e) $f(x, y) = |x|$ $D = B(0, r)$
- (f) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y+1}}$ $D = [0, 1] \times [0, 1]$
- (g) $f(x, y) = \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$ $D = \{x + y + z \leq 1, x, y, z \in (0, +\infty)\}$
- (h) $f(x, y) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{y}$ $D = \{x \in [0, 1], y \in [e^{-x}, e^x]\}$

Esercizio 3. Calcolare l'area interna della seguente regione:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \in [0, 1], |y| \in [x^2, |\sqrt[3]{x}|]\}$$

Esercizio 4. Calcolare il volume del seguente solido, detto Zoccolo di Archimede:

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 2y]\}$$

Esercizio 5. Ricordando che il baricentro $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^3$ di un insieme A , con funzione di densità $\rho(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$, ha coordinate

$$(G_x, G_y, G_z) = \left(\frac{\int_A x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\int_A \rho(x, y, z) dx dy dz}, \frac{\int_A y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\int_A \rho(x, y, z) dx dy dz}, \frac{\int_A z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\int_A \rho(x, y, z) dx dy dz} \right)$$

Calcolare i baricentri dei seguenti insiemi: (dove non indicato $\rho(x, y) = 1$, A si dice omogeneo)

- (a) $A = [0, \delta] \times [0, L]$
- (b) $A = [0, \delta] \times [0, L]$ con $\rho(x, y) = 1 + \frac{x}{L}$
- (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$
- (d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, z \in [0, 1]\}$
- (e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y > 0\}$ con $\rho(x, y) = \frac{\arctan(\frac{y}{x})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$