

Dipartimento di Matematica e Fisica Laurea Triennale in Fisica

# Operatore di Schrödinger con potenziale periodico e quasi periodico

Candidato: Davide Zaccaria Matricola **554003** 

Relatrice: Michela Procesi

Anno accademico 2021/2229 Settembre 2022

### Abstract

L'obiettivo di questa tesi è quello di studiare l'equazione di Schrödinger con potenziale periodico e quasi periodico ponendo particolare attenzione allo spettro dell'operatore associato.

Nel caso periodico iniziamo approfondendo le teorie di Bloch e Floquet, in cui dimostriamo la struttura con "gap" o "lacune" dello spettro. Tali teorie applicano due approcci completamente differenti: se in quella di Bloch possiamo apprezzare i metodi dell'analisi funzionale e quindi della meccanica quantistica, la teoria di Floquet si basa sullo studio dei sistemi dinamici e delle equazioni differenziali.

Successivamente introduciamo il metodo perturbativo della riducibilità per studiare lo stesso spettro dell'operatore periodico: tale metodo consiste in uno schema iterativo super-esponenzialmente convergente che permette di coniugare l'equazione che cerchiamo di risolvere con una cosiddetta *for-ma normale* più semplice da studiare. Grazie a tale approccio perturbativo ritroveremo i medesimi risultati della teoria di Bloch-Floquet.

Infine estenderemo lo studio dell'operatore di Schrödinger al caso quasi-periodico. Per studiare lo spettro questa volta è possibile utilizzare esclusivamente metodi perturbativi, perciò applicheremo sempre lo schema della riducibilità per trovare anche in questo una struttura con delle lacune nello spettro, che presentano però notevoli differenze rispetto al caso periodico. Questo caso è difatti molto più delicato in quanto i gap non sono più un'unione di intervalli ma presentano una struttura più complessa che riusciremo a studiare riscontrando numerose difficoltà tecniche dovute alla presenza di piccoli divisori.

Tali risultati trovano importanti applicazioni nella fisica, specialmente nella fisica dello stato solido. Grazie alla struttura dello spettro di tali operatori possono essere studiate importanti proprietà dei cristalli e dei quasi-cristalli, e grazie alla teoria di Bloch-Floquet possiamo approfondire la comprensione degli isolanti topologici.

# Indice

Introduzione				
1	Cas 1.1 1.2 1.3 1.4	b periodico: teoria di Bloch         Impostazione del problema	8 9 12	
<b>2</b>	Cas	o periodico: teoria di Floquet 2	21	
3	<b>Ap</b> 3.1 3.2	Dicazioni a modelli di interesse fisico       2         Modello di Kronig e Penney       2         Un'introduzione agli Isolanti Topologici       2	25 29	
4	Cas 4.1 4.2 4.3 4.4	<b>b</b> periodico: approccio perturbativo <b>3</b> Impostazione del problema <b>4</b> Preliminari <b>4</b> 4.2.1       Struttura algebrica e norma <b>4</b> 4.2.2       Cambiamenti di coordinate ed esponenziale di Lie <b>4</b> Riducibilità: caso non risonante <b>4</b> 4.3.1       Passo zero <b>4</b> 4.3.2       Primo passo <b>4</b> 4.3.3       Secondo passo <b>4</b> 4.3.4       Iterazione <b>5</b> Riducibilità: caso risonante <b>5</b> Riducibilità: caso risonante <b>6</b> 4.4.1       Passo zero in $\mathbf{R}_0$ <b>6</b> 4.4.2       Primo Passo <b>6</b> 4.4.3       Iterazione <b>6</b> 4.4.4       Punti di bordo <b>6</b> 4.4.5       Nelle generiche zone risonanti $\mathbf{R}_{\ell_0}$ <b>6</b> 4.4.6       Composizione velocità angolari <b>6</b>	<b>8</b> <b>8</b> <b>1</b> <b>1</b> <b>1</b> <b>1</b> <b>1</b> <b>1</b> <b>1</b> <b>1</b>	
5	Cas	o quasi periodico	57	
	5.1	Preliminari	37 38	
	5.2	Cambio di coordinate: caso non risonante       7         5.2.1       Passo zero       7	′0 71	

$5.2.2 \\ 5.2.3$	Primo passo	74 76
Appendice A		80
Appendice B		83
Bibliografia		87

## Introduzione

### Descrizione del problema fisico

Uno degli obiettivi principali nello studio dei sistemi fisici è quello di dedurre le proprietà macroscopiche di un sistema dall'analisi a livello microscopico. Questo gioca un ruolo di primaria importanza soprattutto nella fisica della materia che studia sistemi estremamente complessi, formati da un numero immenso di componenti, e spesso non esattamente risolubili. Proprio per questo motivo risulta fondamentale l'introduzione di modelli semplificati che permettono di dare una comprensione teorica di fenomeni che osserviamo sperimentalmente.

Un campo in cui possiamo riscontrare grandi successi in questo approccio è nello studio dello stato solido, in particolare nei solidi cristallini, costituiti da atomi, molecole o ioni aventi una disposizione geometricamente regolare che si ripete in maniera periodica nelle tre dimensioni spaziali.

Lo studio sistematico dello stato solido ha avuto inizio con la scoperta della diffrazione dei raggi X su dei cristalli nel 1912 che ha portato allo sviluppo di una teoria sull'ordinamento periodico degli atomi nel cristallo da parte di Laue. L'importanza di tali raggi X risiede nel fatto che essi sono onde con lunghezza d'onda paragonabile alla lunghezza dei blocchi costitutivi della materia.

L'altro tassello fondamentale per la nascita della fisica dello stato solido è stato l'avvento della meccanica quantistica che ha permesso di comprendere appieno la dinamica su scale microscopiche.

Infatti, una volta compreso l'ordinamento periodico degli atomi, il focus si è spostato sulla dinamica degli elettroni nel cristallo, in quanto essa determina moltissime prorietà del solido quali la conduzione elettrica e termica. Ora, il primo modello introdotto che permetteva di comprendere alcune proprietà fisiche dei metalli quali la capacità e conducibilità termica, è stato quello del modello ad elettroni liberi. Secondo tale modello gli elettroni di valenza degli atomi costituenti possono diventare elettroni di conduzione e muoversi liberamente. I limiti di tale modello sono evidenti, inoltre risulta fallimentare per problemi basilari come la divisione tra metalli, semiconduttori e isolanti.

All'origine di questa divisione vi è il fatto che nei cristalli gli elettroni sono sistemati in *bande* di energia separate da zone proibite, o gap. L'esistenza e la misura di questi gap differenziano le tre classi di solidi.

Per spiegare l'esistenza del modello a bande nasce la *teoria di Bloch* del 1928.

Secondo tale teoria gli elettroni risentono dell'attrazione dei nuclei tramite un potenziale periodico dovuto all'ordinamento (periodico) degli atomi nel reticolo. In questo modo è possibile caratterizzare lo stato elettronico, ossia trovare le soluzioni al problema di Schördinger che vedremo in seguito, con le cosiddette *funzioni di Bloch*. Ovviamente anche questo è un modello semplificato poichè, ad esempio, vengono trascurate tutte le interazioni elettrone-elettrone e nucleo-nucleo, ma data la scarsa intensità di tali interazioni rispetto a quelle considerate, si arriva comunque a risultati piuttosto soddisfacenti come vedremo nel corso della prima applicazione della teoria di Bloch: il *modello di Kronig-Penney*. Attraverso tale modello semplificato riusciremo ad ottenere analiticamente la divisione tra conduttori isolanti o semiconduttori e dunque le bande energetiche nei solidi.



Figura 1: Bande energetiche in un solido.

É possibile, inoltre, arrivare ai medesimi risultati della teoria di Bloch con l'approccio dei sistemi dinamici: studiare le stesse equazioni differenziali nel caso di potenziali periodici avendo come grado di libertà non più lo spazio ma il tempo. Tale trattazione si deve al lavoro del matematico francese Floquet nel 1883. Sebbene i risultati siano identici, sarà interessante nel corso della trattazione apprezzare un approccio così differente allo stesso problema.

Vedremo nel corso del lavoro che questa teoria di Bloch-Floquet ha importanti applicazioni come negli isolanti topologici: dei solidi che si comportano come isolanti al proprio interno, ma contengono *stati conduttori di bordo* sulla superficie esterna, ossia gli elettroni possono muoversi solo lungo la superficie di tale materiale. Il punto cruciale di questi materiali (ovvero il motivo della loro denominazione) è che la presenza di tali stati al bordo è legata a delle proprietà "topologiche" che rimangono invariate per interazioni esterne al sistema, e dunque la natura di isolante topologico può essere preservata per perturbazioni. Sono stati realizzati sperimentalmente numerosi isolanti topologici e sono di grande utilizzo in moltissimi settori come nella realizzazione di transistor per computer quantistici, in modo da sfruttare la loro natura invariante per perturbazioni.



Figura 2: Relazione di dispersione di un isolante topologico.

Solitamente vengono studiati modelli 2D o 3D di isolanti topologici, in questa tesi invece presentiamo un modello unidimensionale detto modello di Su-Schrieffer-Heeger. L'importanza di tale modello risiede nella sua grande semplicità: è un'ottimo punto di partenza per comprendere modelli più complicati multidimensionali.

Un'estensione naturale all'equazione di Schödinger periodica consiste nel caso di un potenziale *quasi-periodico*. Tale equazione è di rilevanza fisica in quanto viene utilizzata per studiare il modello dei cosiddetti *quasi-cristalli*, un nuovo stato della materia cristallina che sta attirando a sè molta attenzione.

Essi vennero osservati per la prima volta nel 1982 sempre grazie alla diffrazione da raggi X da Shechtman in quanto presentavano una simmetria (pentagonale) non compatibile con quella dei normali cristalli. La struttura dei quasi-cristalli è estremamente delicata, e non entreremo in merito perchè non è l'obiettivo della tesi; ma per darne un'idea possiamo semplicemente osservare che mentre in un normale solido cristallino la posizione degli atomi è disposta in un reticolo periodico di punti che si ripetono periodicamente nello spazio, nei quasicristalli la disposizione locale degli atomi è fissa e regolare, ma non è periodica in tutto il materiale: ogni cella ha una configurazione differente dalle celle che la circondano.

Dimostreremo che anche in questo caso lo spettro presenta una struttura con lacune, ma a livello strutturale nel caso quasi periodico vi sono profonde differenze qualitative poichè i gap non sono più unione di intervalli (come nel caso periodico) ma hanno una struttura molto più complessa.

Negli ultimi anni sono stati sintetizzati centinaia di quasicristalli, e nel 2009 è stato ritrovato un quasicristallo naturale derivante da un meteorite formatosi miliardi di anni or sono; le applicazioni di questi solidi potrebbe essere svariate dovute alla loro forte propensione ad assorbire deformazioni e alla loro ottima capacità di conduzione. La ricerca in questo settore è attiva e fortemente in crescita, e le questioni aperte sono ancora molte.

### Descrizione del lavoro

Nel primo capitolo della tesi studieremo la teoria di Bloch dal punto di vista più formale e matematico utilizzando strumenti di analisi funzionale che richiameremo in breve. Per una presentazione più esaustiva è possibile consultare [5],[3], [9]. La trattazione della teoria di Bloch deriva principalmente da [2], ma alcune parti sono prese anche da [5],[3], [9], [4], mentre il capitolo sulla decomposizione spettrale da [7]. Anche in questo caso non sono riportate completamente le dimostrazioni per non appesantirne la lettura. In tale parte viene analizziamo l'equazione di Schrödinger con potenziale periodico, e dunque, dato l'operatore che rappresenta tale equazione nello spazio di funzioni che ci interessa, ne viene caratterizzato completamente lo spettro e le autofunzioni generalizzate, effettuando infine la decomposizione spettrale.

Nel secondo capitolo invece analizzeremo la teoria di Floquet che, come abbiamo già detto, pone le proprie basi nello studio dei sistemi dinamici. Ritroveremo gli stessi risultati di Bloch con un approccio molto diverso. Per la stesura di tale capitolo, invece, è stato utilizzato principalmente [3], con qualche spunto da [8]. La dimostrazione verrà riportata solo nei complessi, sebbene accenneremo anche al caso reale.

Il capitolo successivo riguarda le due applicazioni fisiche della teoria di Bloch-Floquet che abbiamo accennato sopra: il modello di Kronig e Penney, che spiega la presenza di gap energetici nei solidi cristallini, basato su [11], e la catena SSH, che consiste in un modello unidimensionale di isolante topologico, discusso come in [1] e [10].

Successivamente viene analizzata l'equazione di Schrödinger con potenziale periodico in maniera perturbativa; il metodo perturbativo che utilizzeremo è quello della riducibilità: consiste in uno schema iterativo in cui si realizza una successione di cambiamenti di coordinate super-esponenzialmente convergente che riduce il sistema iniziale ad un'equazione differenziale a coefficienti costanti. Effettueremo, cioè, quella che viene spesso chiamata una coniugazione in *forma normale*. Questo sarà possibile grazie alle forti proprietà dei gruppi di Lie in cui definiremo tutti i nostri cambiamenti di coordinate. Vedremo che con questo metodo ritroveremo la struttura a bande che è stata dimostrata nel primo capitolo.

Questo procedimento potrebbe apparire inutile, o fine a sè stesso. In realtà lo scopo è comprendere lo schema iterativo che applicheremo al caso quasi periodico, che invece è risolubile esclusivamente in maniera perturbativa. Grazie a questo capitolo, quello successivo in cui analizziamo l'operatore quasi periodico risulterà più semplice alla lettura e ci sarà più confidenza con la notazione.

Nel caso dell'operatore quasi periodico studieremo solo lo spettro nelle zone permesse sempre con lo schema della riducibilità, notando come i gap diventano sempre più piccoli e, come già detto precedentemente, non sono più un'unione di intervalli ma hanno una struttura profondamente differente dal caso periodico. Sebbene il metodo converga molto rapidamente, il punto tecnicamente più delicato della questione sarà trattare il problema di piccoli divisori. Non studieremo, invece, le zone proibite o di gap in quanto sono argomento di uno studio più avanzato e approfondito che non vuole essere incluso in questo lavoro.

I capitoli in cui viene studiato l'operatore periodico e quasi periodico con lo schema iterativo sono stati sviluppati in maniera autonoma con l'aiuto della professoressa Procesi.

# Capitolo 1 Caso periodico: teoria di Bloch

### 1.1 Impostazione del problema

Per studare il moto degli elettroni nel reticolo cristallino studiamo l'equazione spettrale dell'operatore di Schrödinger indipendente dal tempo

$$\mathscr{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x), \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}$$
(1.1.1)

dove v è una funzione analitica periodica di periodo L, ossia cerchiamo le autofunzioni generalizzate stazionarie  $\psi(x)$  tali che risolvano

$$\mathscr{H}\psi(x) = E \ \psi(x). \tag{1.1.2}$$

Il motivo per cui basta studiare l'equazione agli autovalori per caratterizzare l'evoluzione temporale delle funzioni d'onda che descrivono il sistema sarà spiegato nella sezione 1.2.

Dunque per studiare e caratterizzare la dinamica del nostro problema possiamo studiare equazione di Schrödinger unidimensionale:

$$\psi_{xx} + v(x)\psi = E \ \psi \tag{1.1.3}$$

dove v, essendo come sappiamo analitica e L-periodica, la si può scrivere come serie totalmente convergente di Fourier in tal modo:

$$v(x) = \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ l \neq 0}} v(\ell) e^{\mathrm{i}(\frac{2\pi}{L}\ell)x}, \qquad |v|_s := \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ l \neq 0}} |v(\ell)| e^{s|\ell|} < \infty$$

Possiamo notare che se la taglia della perturbazione tende a zero, il sistema diventa una particella libera descritta dall'equazione

$$\psi_{xx} = E \ \psi \,,$$

che è ben noto avere come soluzioni una sovrapposizione di onde piane  $e^{ikx}$  e  $e^{-ikx}$ , ossia avere spettro continuo su tutto l'asse reale negativo ( $E \leq 0$ ) con degenerazione pari a 2 (E(k) = E(-k)).

In questo primo capitolo, come abbiamo già detto, ci poniamo l'obbiettivo di studiare le soluzioni dell'equazione 1.1.3, con un'attenzione particolare all'esistenza di soluzioni periodiche, e allo studio dello spettro dell'operatore 1.1.1.

Lo studio dello spettro di questo operatore è un problema pienamente affrontato. Riportiamo in questo elaborato i tratti salienti della discussione che prendere il nome di *teoria di Bloch*. Tale teoria crea una corrispondenza tra soluzioni stabili (ossia limitate e in  $L^2$ ) dell'equazione 1.1.3 e spettro.

Il risultato a cui vogliamo arrivare è il seguente:

**Teorema 1.1.1** (BLOCH). Sia v una funzione continua e periodica di periodo L, e sia  $\mathscr{H}$  come definito in 1.1.1 un operatore essenzialmente autoaggiunto in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  gli autovalori del corrispondente operatore in (0, L) con condizioni periodiche al contorno (i.e. energie corrisponenti al valore di impulso p = 0), e siano  $\eta_1, \eta_2, \dots$  gli autovalori con condizioni antiperiodiche al contorno (i.e. energie corrisponenti al valore di impulso  $p = \frac{\pi}{L}$ )

Siano

$$\alpha_n = \begin{cases} \lambda_n, & per \quad n \quad dispari \\ \eta_n, & per \quad n \quad pari \end{cases} \qquad \beta_n = \begin{cases} \eta_n, & per \quad n \quad dispari \\ \lambda_n, & per \quad n \quad pari \end{cases}$$
(1.1.4)

Allora valgono i seguenti risultati:

(a). 
$$\sigma(\mathscr{H}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$$
  
(b).  $\mathscr{H}$  ha esclusivamente spettro continuo.

La discussione in seguito sarà indirizzata a capire perchè vale il seguente risultato e come ci si è arrivati. Per non appesantire troppo la lettura, non riporteremo tutte le dimostrazioni, ma solo quelle cruciali per la trattazione.

### 1.2 Richiami di Analisi Funzionale

In questa sezione richiameremo brevemente alcune importanti nozioni di analisi funzionale che verranno utilizzate in seguito.

Siano X, Y due spazi vettoriali normati e completi, ossia due spazi di Banach. Indicheremo con  $\mathcal{L}(X, Y)$  lo spazio degli operatori lineari continui definiti da X a Y munito dell'usuale norma operatoriale  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ . Uno spazio di Banach dotato di un prodotto scalare è uno spazio di Hilbert. Lo spazio di Hilbert su cui lavoreremo è  $L^2(\mathbb{R})$  con prodotto scalare definito da

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)^* g(x) dx$$

dove con il simbolo \* indichiamo l'operazione di coniugazione complessa.

**Definizione 1.2.1.** Dato un operatore  $\mathcal{A}$  definito su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  l'aggiunto di  $\mathcal{A}$  che chiameremo  $\mathcal{A}^{\dagger}$  è definito dalla relazione

$$\langle \mathcal{A}f,g\rangle = \langle f,\mathcal{A}^{\dagger}g\rangle$$

**Definizione 1.2.2.** Un operatore  $\mathcal{A}$  definito su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è **autoaggiunto** o **hermi**tiano se  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\dagger}$ .

Ricordiamo ora le definizioni di risolvente e spettro di un operatore nel caso limitato.

**Definizione 1.2.3** (RISOLVENTE). Siano X uno spazio di Banach e sia  $\mathcal{A}$  un operatore lineare e limitato definito su X. Definiamo insieme risolvente di  $\mathcal{A}$  l'insieme

$$\rho(\mathcal{A}) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \ t.c. \exists \ (\mathcal{A} - \lambda I_d)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X) \}.$$

L'operatore  $(\mathcal{A} - \lambda I_d)^{-1}$  è detto operatore risolvente e lo si indica con  $\mathcal{R}_{\lambda}$ .

Il complementare del risolvente rispetto al campo complesso è lo **spettro** dell'operatore.

**Definizione 1.2.4** (SPETTRO). Siano X uno spazio di Banach e sia  $\mathcal{A}$  un operatore lineare e limitato definito su X. Lo spettro  $\sigma(\mathcal{A})$  dell'operatore  $\mathcal{A}$  è definito come

$$\sigma(\mathcal{A}) := \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}).$$

Tale spettro si divide in:

• Spettro discreto.

$$\sigma_p(\mathcal{A}) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \ t.c. \ (\mathcal{A} - \lambda I_d) \ non \ e \ iniettivo. \}$$

Lo spettro discreto è banalmente l'insieme degli autovalori, cioè dei  $\lambda$  tali che esiste  $x \in X$ per cui  $\mathcal{A}x = \lambda x$ .

• Spettro residuo.

$$\sigma_r(\mathcal{A}) := \{ \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma_p(\mathcal{A}) \ t.c. \ \overline{Im(\mathcal{A} - \lambda I_d)} \subsetneq X \},\$$

ossia l'insieme dei valori di  $\lambda$  per cui il risolvente esiste ma ha un dominio non denso su X.

• Spettro continuo.

$$\sigma_c(\mathcal{A}) := \{ \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \setminus (\sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A})) \ t.c. \ \exists \ (\mathcal{A} - \lambda I_d)^{-1} \notin \mathcal{L}( \ \overline{Im(\mathcal{A} - \lambda I_d)} \ , X) \}.$$

In tale definizione, la non appartenenza a  $\mathcal{L}(\overline{Im(\mathcal{A} - \lambda I_d)}, X)$  equivale a richiedere che il risolvente non sia continuo.

**Osservazione 1.2.5.** Se X ha dimensione finita, lo spettro residuo e quello continuo non esistono, ossia vi è soltanto spettro discreto, che corrisponde chiaramente con l'insieme degli autovalori.

**Osservazione 1.2.6.** Se  $\mathcal{A}$  è un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  allora sono valide le seguenti proprietà:

- A non ha spettro residuo,
- gli autovalori sono reali,
- autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

Il problema che si pone è che il nostro operatore Hamiltoniano  $\mathscr{H}$  è illimitato e non è definito su tutto spazio di Hilbert delle funzioni  $L^2$ . É possibile definirlo sulle funzioni infinitamente derivabili e a supporto compatto  $\mathcal{R}$  che indicheremo con  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{R})$ . Tale sottspazio è denso in  $L^2$ , perciò è necessario generalizzare le definizioni iniziali. **Definizione 1.2.7.** Definiamo un operatore lineare su un generico spazio di Banach X come la coppia  $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$  dove  $\mathcal{D}$  è sottospazio lineare denso in X (i.e.  $\overline{\mathcal{D}} = X$ ) e  $\mathcal{A}$  è una mappa lineare  $\mathcal{A} : \mathcal{D} \to X$ . Chiameremo  $\mathcal{D}$  il dominio di  $\mathcal{A}$ , che indicheremo con  $Dom(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$ . Se  $\tilde{\mathcal{D}}$  è un sottospazio lineare di X che contiene  $\mathcal{D}$  e  $\tilde{\mathcal{A}}f = \mathcal{A}f$  per ogni  $f \in \mathcal{D}$ , allora diciamo che  $\tilde{\mathcal{A}}$  è un'estensione di  $\mathcal{A}$ .

L'operatore differenziale che vogliamo studiare gode della proprietà fondamentale di essere essenzialmente autoaggiunto, ma per capire tale proprietà dobbiamo introdurne un'altra più elementare che è la simmetria.

**Definizione 1.2.8.** Un operatore  $\mathcal{A}$  con dominio denso  $\mathcal{D}$  in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  si dice simmetrico se per ogni  $f, g \in \mathcal{D}$ , si ha

$$\langle \mathcal{A}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{A}g \rangle.$$

Se  $\mathcal{A}$  è simmetrico allora è semplice vedere che  $\mathcal{A}^{\dagger}$  è un'estensione di  $\mathcal{A}$ .

**Definizione 1.2.9.** Diremo che  $\mathcal{A}$  è autoaggiunto se è simmetrico e  $Dom(\mathcal{A})=Dom(\mathcal{A}^{\dagger})$ .

**Definizione 1.2.10.** Diremo che A è essenzialmente autoaggiunto se è simmetrico e la sua chiusura è autoaggiunta.

Questa proprietà di essere essenzialmente autoaggiunto caratterizza in maniera fondamentale lo spettro del nostro operatore:

**Proposizione 1.2.11.** Se  $\mathcal{A}$  è un operatore illimitato definito su un dominio  $\mathcal{D}$  denso in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , e tale operatore è essenzialmente autoaggiunto in  $\mathcal{H}$ , allora valgono le seguenti affermazioni:

- lo spettro e il risolvente di A sono definiti allo stesso modo del caso limitato,
- A non ha spettro residuo,
- gli autovalori sono reali.

Le dimostrazioni che portano a tali risultati sono piuttosto tecniche e non verranno scritte in tale trattazione. Sono riportate in maniera esaustiva in [5],[3], [9].

Vediamo ora come il problema di caratterizzare l'evoluzione temporale di uno stato quantistico si riduce allo studio dello spettro dell'operatore di Schrödinger.

Consideriamo un generico stato quantistico  $\vartheta(x,t) \in L^2(\mathbb{R})$  la cui dinamica è descritta da un generico operatore Hamiltoniano indipendente dal tempo  $\mathscr{H}(x)$  che sia autoaggiunto o essenzialmente autoaggiunto su  $L^2(\mathbb{R})$ .

Supponiamo ad esempio che  $\mathscr{H}$  sia di dimensione n ed ammetta spettro puramente discreto, ossia supponiamo che sia possibile trovare n autovalori diversi  $\lambda_1, ..., \lambda_n$  con associate n autofunzioni  $\psi_1(x), ..., \psi_n(x)$  che soddisfano  $\mathscr{H}\psi_i = \lambda_i\psi_i$  per i = 1, ..., n.

Dato che tali autofunzioni costituiscono una base ortonormale, è sempre possibile trovare dei coefficienti  $c_i(t)$  tali che

$$\vartheta(x,t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\psi_i(x).$$

Come ben sappiamo l'evoluzione temporale dello stato  $\vartheta(x,t)$  è regolata dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\vartheta(x,t)}{dt} = \mathscr{H}\vartheta(x,t) = \mathscr{H}\sum_{i} c_{i}(t)\psi_{i}(x) = \sum_{i}\lambda_{i}c_{i}(t)\psi_{i}(x)$$

in questo modo otteniamo facilmente

$$\dot{c}_j(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \lambda_j c_j(t) \Longleftrightarrow c_j(t) = e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \lambda_j} c_j(0) \quad \forall \ j = 1, ..., n$$

e dunque che la dipendenza temporale dello stato è solo attraverso un fattore di fase. Insomma basterà studiare e caratterizzare le autofunzioni e gli autovalori dell'operatore  $\mathscr{H}$  per poter effettuare la decomposizione spettrale di  $L^2(\mathbb{R})$  e dunque studiare la dinamica del sistema.

Questo è quanto vale nel caso di spettro discreto, esiste anche un'estensione per spettro continuo. Vedremo tale estensione solo nel caso che ci interessa, ossia con  $\mathscr{H}$  come definito in 1.1.1, e sarà argomento della sezione 1.4.

### 1.3 Funzioni di Bloch e struttura a bande dello spettro

Consideriamo, dunque, l'operatore  $\mathscr{H}$  come definito in 1.1.1, con potenziale  $v : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$  analitico e periodico di periodo L, ossia

$$v(x + \mathbf{L}) = v(x) \quad e \quad v(x + p) \neq v(x) \quad con \quad p \in (0, \mathbf{L}).$$

Come abbiamo visto sopra, questo operatore  $\mathscr{H}$  è un operatore essenzialmente autoaggiunto in  $L^2$ , definito sulle funzioni  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{R})$ . Dalle proprietà elencate nella sezione precedente sugli operatori essenzialmente autoaggiunti, possiamo studiare autovalori di  $\mathscr{H}$  reali. D'ora in avanti perciò considerermo energie  $E \in \mathbb{R}$ . Inoltre sappiamo che non può esserci spettro residuo nè discreto, dunque gli autovalori o appartengono allo spettro continuo o al risolvente dell'operatore.

Vogliamo studiare le soluzioni di 1.1.2, e per farlo studiamo  $\mathscr{H}$  sulle funzioni  $C_{loc}^2$  in modo da considerare soluzioni  $\psi$  in uno spazio più generale possibile. É importante notare che quando ci riferiremo alle autofunzioni dell'operatore  $\mathscr{H}$ , ci stiamo in realtà riferendo alle sue autofunzioni generalizzate ossia che non appartengono a priori allo spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ .

Introduciamo ora l'operatore di traslazione lungo la direzione x di una quantità L, che agirà in tal modo:

$$\mathcal{L}\left[\psi(x)\right] = \psi(x + \mathbf{L}).$$

Risulta evidente, ricordando la periodicità della funzione v(x), il fatto che i due operatori  $\mathscr{H} \in \mathcal{L}$ commutino, e dunque ammettono una base di autofunzioni in comune. Questo implica, inoltre, che l'operatore  $\mathcal{L}$  mappa lo spazio bidimensionale delle soluzioni dell'equazione

$$\mathscr{H}\psi(x) = E \ \psi(x), \quad \text{con} \quad E \in \mathbb{R}$$
 (1.3.1)

che denoteremo con  $\mathcal{V}_E \subseteq C^2_{loc}$ , in se stesso. Tale spazio delle soluzioni  $\mathcal{V}_E$  è uno spazio vettoriale di dimensione 2 poichè è lo spazio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del second'ordine.

Consideriamo ora le autofunzioni di tale operatore, esse sono le funzioni  $\psi \in C^2(\mathbb{R})$  tali che

$$\psi(x+\mathbf{L}) = \mu\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
(1.3.2)

dove  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  viene comunemente chiamato *moltiplicatore*. Allora posso scegliere  $p \in \mathbb{C}$ , denominato *quasi-momento*, in modo da poter scrivere  $\mu = e^{ipL}$ , e allora riscriviamo 1.3.2 come

$$\psi(x+L) = e^{ipL}\psi(x) \quad \iff \quad \psi(x) = e^{ipx}\phi(x), \quad \text{dove} \quad \phi(x+L) = \phi(x). \tag{1.3.3}$$

dove abbiamo chiamato  $\phi(x) = e^{-ipx}\psi(x)$ , e dunque  $\phi$  è periodica di periodo L, ossia è un'autofunzione dell'operatore  $\mathcal{L}$  con autovalore 1.

**Definizione 1.3.1** (FUNZIONI DI BLOCH). Una Funzione di Bloch è un'autofunzione non banale dell'operatore  $\mathcal{L}$  che soddisfa 1.3.3, ossia che si può riscrivere come

$$\psi(x) = e^{ipx}\phi(x)$$

dove  $\phi(x)$  è periodica di periodo L.

Sottolineiamo il fatto che non si possa definire il quasi-momento p di una funzione di Bloch in maniera univoca, poichè il suo valore si ripete identico ogni multiplo di  $2\pi L$ . Perciò considereremo solo quasi-momenti p tali che

$$Re \ p \in (-a, a], \quad \text{dove} \quad a = \frac{\pi}{L}$$

**Definizione 1.3.2** (ZONA DI BRILLOUIN). Si definisce Zona di Brillouin l'insieme  $\mathcal{B} = (-a, a]$ 

Il primo lemma che caratterizza le autofunzioni del nostro operatore è il seguente

**Lemma 1.3.3.** Se il quasi-momento p ha parte immaginaria non nulla, allora le corrispondenti soluzioni a 1.3.1 appartengono al risolvente dell'operatore  $\mathcal{H}$ .

Dimostrazione. Se  $Im(p) \neq 0$  allora le soluzioni crescono o decrescono esponenzialmente per  $x \to \infty$ , ossia tale zona contiene due soluzioni indipendenti  $\psi_{\pm}(x, E)$  di 1.3.1 che appartengono allo spazio  $L^2(\mathbb{R}_{\pm})$  dove  $\mathbb{R}_{+} = (0, \infty), \mathbb{R}_{-} = (-\infty, 0)$ . Sappiamo, grazie a un risultato di Weyl(1910) che queste due soluzioni caratterizzano l'insieme risolvente dell'operatore, che come già sappiamo coincide con l'insieme degli autovalori che risolvono 1.3.1.

Per trovare le soluzioni a 1.3.1 risulta comodo scriversi la funzione di Green

$$G(x, y; E) = \begin{cases} \frac{\psi_+(x, E)\psi_-(y, E)}{[\psi_+, \psi_-]} & \text{se } x \ge y\\ \frac{\psi_-(x, E)\psi_+(y, E)}{[\psi_-, \psi_+]} & \text{se } y \ge x \end{cases}$$
(1.3.4)

dove

$$[f,g] = f\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dx}g$$

Ovviamente la 1.3.4 è ben definita per l'indipendenza delle soluzioni scelte.

A questo punto è facile verificare che

$$(\mathscr{H} - EI) (G(x, y; E)) = \delta_y(x)$$

moltiplicando per il generico elemento  $f(x) \in L^2$  e integrando su  $\mathbb{R}$ , si ottiene

$$f(y) = (\mathscr{H} - EI) \int_{\mathbb{R}} G(x, y; E) f(x) dx.$$

Ossia, in maniera più compatta

$$Gf = (\mathscr{H} - E\mathbf{I})^{-1} f.$$

Dunque per affermare l'uguaglianza tra i due operatori si utilizza il seguente

**Lemma 1.3.4.** Sia G(x, y; E) la funzione di Green come definita in 1.3.4. Allora:

$$f \longrightarrow Gf(x) := \int_{\mathbb{R}} G(x, y; E) f(y) dy$$

definisce un operatore lineare e continuo su  $L^2(\mathbb{R})$ . Inoltre,  $G(x, y; E) = (\mathscr{H} - EI)^{-1}$ .

La dimostrazione di tale lemma non verrà riportata, ma si può trovare in [3]. Dunque tali valori di E non appartengono allo spettro continuo.

Per quanto detto sopra, d'ora in avanti considereremo solo valori del quasi momento con parte immaginaria nulla ( $p \in \mathbb{R}$ ), ossia considereremo solo  $|\mu| = 1$ .

Lemma 1.3.5. Lo spettro dell'operatore  ${\mathscr H}$  appartiene all'insieme

$$\mathbb{D}(E) := \{ E \ t.c. \ |D(E)| \le 1 \}$$
(1.3.5)

dove  $D(E) = \frac{1}{2}[\psi_1(\mathbf{L}, E) + \psi'_2(\mathbf{L}, E)]$ , con  $\psi_1(\mathbf{L}, E), \psi_2(\mathbf{L}, E)$  soluzioni indipendenti di 1.3.1 calcolate in  $x = \mathbf{L}$ .

Dimostrazione. Per dimostrare ciò useremo la rappresentazione matriciale di  $\mathcal{L}$ . Per quanto visto fin ora, difatti, esisterà sempre almeno una funzione di Bloch nello spazio  $\mathcal{V}_E$  delle soluzioni a 1.3.1, pertanto ci riferiremo a tali funzioni come alle *autofunzioni di Bloch dell'operatore*  $\mathcal{H}$ . Bisognerà capire quali delle funzioni di Bloch soddisfano la condizione 1.3.1 per essere definite autofunzioni di  $\mathcal{H}$ .

Dato che  $\mathcal{L} : \mathcal{V}_E \to \mathcal{V}_E$ , allora esso ammette rappresentazione matriciale. Nello spazio vettoriale  $\mathcal{V}_E$  di dimensione 2 scegliamo come base le soluzioni

$$\psi_1 = \psi_1(x, E) \quad e \quad \psi_2 = \psi_2(x, E)$$

definite dalle condizioni iniziali

$$\psi_1(0,E) = 1, \ \psi'_1(0,E) = 0; \ \psi_2(0,E) = 0, \ \psi'_2(0,E) = 1.$$
 (1.3.6)

Tali funzioni sono analitiche in E e in x, con  $E, x \in \mathbb{R}$ . Studiamo ora, dunque, la matrice che rappresenta l'operatore  $\mathcal{L}$  nello spazio  $\mathcal{V}_E$  generato dalla base  $\{\psi_1, \psi_2\}$ .

$$\mathcal{L}[\psi_1(x,E)] = \psi_1(x+L,E) = c_{11}(E)\psi_1(x,E) + c_{21}\psi_2(x,E)$$
  
 
$$\mathcal{L}[\psi_2(x,E)] = \psi_2(x+L,E) = c_{12}(E)\psi_1(x,E) + c_{22}\psi_2(x,E).$$

Dunque la matrice dei coefficienti  $c_{i,j}$  è la matrice rappresentativa di  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{V}_E$ . Dalle condizioni in 1.3.6, otteniamo

$$c_{11} = \psi_1(\mathbf{L}, E), \quad c_{21} = \psi_1'(\mathbf{L}, E), \quad c_{12} = \psi_2(\mathbf{L}, E), \quad c_{22} = \psi_2'(\mathbf{L}, E).$$

In tal modo otteniamo la matrice di  $\mathcal{L}$  nella base  $\{\psi_1, \psi_2\}$ 

$$\mathcal{L} \mid_{\mathcal{V}_E} = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{L}, E) & \psi_2(\mathbf{L}, E) \\ \psi_1'(\mathbf{L}, E) & \psi_2'(\mathbf{L}, E) \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è il Wronskiano delle soluzioni  $\psi_1, \psi_2$  in x = L, perciò è evidente che det  $\mathcal{L}|_{\mathcal{V}_E} = 1$ . A questo punto, l'equazione caratteristica che permette di determinare gli autovalori  $\mu$  della matrice, è della forma

$$\mu^2 - 2D(E)\mu + 1 = 0 \tag{1.3.7}$$

dove

$$D(E) = \frac{1}{2} [\psi_1(L, E) + \psi'_2(L, E)].$$

Dato che  $E \in \mathbb{R}$ , allora le soluzioni  $\psi_1(x, E), \psi_2(x, E)$  e dunque anche D(E) sono reali, e allora le soluzioni a 1.3.7 possono essere di due tipi:

- 1.  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ , e tali che  $\mu_1 \mu_2 = 1$ , con  $\mu_1, \mu_2 \neq \pm 1$ ,
- 2.  $\mu_1 = \overline{\mu_2} \in |\mu_1| = |\mu_2| = 1.$

Le corrispondenti autofunzioni saranno funzioni di Bloch con moltiplicatori  $\mu_1, \mu_2$ . Se  $\mu_1 \neq \mu_2$ , allora esisterà una base composta da due funzioni di Bloch con tali moltiplicatori in  $\mathcal{V}_E$ . Come già detto in precedenza, se un moltiplicatore soddisfa la 1., allora la funzione di Bloch esploderà esponenzialmente e, come visto nel lemma 1.3.3, non può appartenere allo spettro, dunque per studiare funzioni di Bloch nello spettro il moltiplicatore associato deve soddisfare 2.

Riprendendo la 1.3.7, si trova

$$\mu_{1,2} = D(E) \pm \sqrt{D^2(E)} - 1.$$

Da questa equazione risulta ovvio che l'insieme degli autovalori  $\mu$  che rispettano la 2. coincide con l'insieme 1.3.5 che ricordiamo essere definito da

$$\mathbb{D}(E) = \{ E \ t.c. \ |D(E)| \le 1 \}.$$

In particolare, lo spettro  $\sigma(\mathscr{H})$  dell'operatore  $\mathscr{H}$  sicuramente farà parte dell'insieme 1.3.5, vedremo in seguito che tali insiemi coincideranno.

Possiamo notare che una autofunzione di Bloch  $\psi(x)$  con moltiplicatore  $\mu$  è periodica di periodo L se e solo se  $\mu = 1$ , che equivale a D(E) = 1, ossia a  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ 

Di notevole interesse è il caso D(E) = -1, che corrisponde al caso  $\mu_1 = \mu_2 = -1$ . Le rispettive autofunzioni di Bloch che dunque cambiano il segno sotto l'azione dell'operatore traslazione della quantità L sono chiamate *antiperiodiche*, e sono periodiche di periodo minimo pari a 2L.

Gli autovalori associati alle autofunzioni periodiche o antiperiodiche rappresentano chiaramente gli estremi, o i bordi di  $\mathbb{D}(E)$ .

Ora è il momento di cambiare punto di vista e concentrarsi sulla relazione tra l'energia E ed il quasi-momento p, per dimostrare il seguente

**Lemma 1.3.6.** Lo spettro dell'operatore  $\mathscr{H}$  coincide con  $\mathbb{D}(E)$ .

Dimostrazione. Applichiamo l'operatore  $\mathscr{H}$  alla generica funzione di Bloch della forma descritta in 1.3.3, un risultato che è possibile trovare direttamente è che

$$\mathscr{H}[e^{ipx}\phi(x)] = e^{ipx} \mathscr{H}_p[\phi(x)]$$
(1.3.8)

dove

$$\mathscr{H}_{p} = -\frac{d^{2}}{dx^{2}} - 2ip\frac{d}{dx} + p^{2} + v(x).$$
(1.3.9)

É conveniente considerare tale operatore nello spazio di Hilbert  $L^2(S^1)$ , dove  $S^1 = \mathbb{R} \setminus L\mathbb{Z}$ , ossia la chiusura dell'insieme  $C^{\infty}(S^1)$  delle funzioni liscie periodiche di periodo L che identificheremo con  $D_0$ .

Consideriamo, in  $L^2(S^1)$ , l'operatore in 1.3.9 senza il potenziale, ossia

$$\mathscr{H}_{p,0} = -\frac{d^2}{dx^2} - 2\mathrm{i}p\frac{d}{dx} + p^2$$

ottenuto dalla chiusura del dominio  $D_0$ .

Tale operatore ammette una base completa di autofunzioni ortonormali

$$\phi_n^{(0)}(p,x) = \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i n x}{\mathbf{L}}} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
(1.3.10)

con associati autovalori

$$\varepsilon_n^{(0)}(p) = (2an+p)^2, \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
 (1.3.11)

dove  $a = \frac{\pi}{L}$ .

É possibile dimostrare che l'operatore  $\mathscr{H}_p$  ha l'inverso compatto, ossia ha spettro completamente discreto. Inoltre, dalla teoria delle perturbazioni sappiamo che gli autovalori di tale operatore saranno vicini a quelli di 1.3.11.

Possiamo sempre ordinare tali autovalori in maniera ascendente, in modo tale che

$$\varepsilon_0(p) \le \varepsilon_1(p) \le \varepsilon_2(p) \le ..$$

Tali funzioni risultano continue in  $p \in B$  e vengono comunemente chiamate funzioni di banda dell'operatore  $\mathscr{H}_{p,0}$ . É evidente che  $\varepsilon_n(p) \to \infty$  per  $n \to \infty$ .

Consideriamo ora

$$\psi_n(p,x) = e^{ipx}\phi_n(p,x).$$

Per la 1.3.8 si ha che

$$\mathscr{H}[\psi_n(p,x)] = \varepsilon_n(p)\psi_n(p,x), \qquad (1.3.12)$$

ossia  $\psi_n(p,x)$  è un'autofunzione dell'operatore  $\mathscr{H}$  con relativo autovalore  $\varepsilon_n(p)$ . Risulta evidente che  $\overline{\psi_n(p,x)}$  è ancora di Bloch con quasi momento -p, e l'energia, come vediamo in 1.3.11, ha degenerazione per scambio di segno, ossia

$$\varepsilon_n(-p) = \varepsilon_n(p)$$
 per  $n = 0, 1, 2, \dots$ 

Osserviamo che se  $p \in \mathcal{B}$ , ma  $p \neq 0, a$ , allora le funzioni  $\psi_n$  e  $\overline{\psi_n}$  non sono proporzionali in quanto i loro moltiplicatori  $\mu_1 = e^{ipL}$ ,  $\mu_2 = e^{-ipL}$  sono diversi. Allora le funzioni  $\psi_n$  e  $\overline{\psi_n}$  formano una base per lo spazio bidimensionale delle soluzioni di 1.3.12. Questo implica la seguente

**Proposizione 1.3.7.** 1. tutti gli autovalori  $\varepsilon_n(p)$  per  $p \in \mathcal{B}, p \neq (0, a)$  sono semplici, e per  $p \in (-a, 0)$ ,  $e \ p \in (0, a)$ , vale che

$$\varepsilon_0(p) < \varepsilon_1(p) < \varepsilon_2(p) < \dots$$

Inoltre se  $\varepsilon_j(p) = \varepsilon_{j'}(p')$ , dove  $p, p' \in (0, a)$  o (-a, 0), allora j = j' e p = p'.

2. tutte le autofunzioni  $\phi_n(p, x)$  possono essere scelte tra le funzioni analitiche in p nell'intervallo (-a, 0) e in (0, a).

**Corollario 1.3.8.** Le funzioni  $\varepsilon_n(p)$  sono strettamente monotone in [0,a].

Per capire la direzione della loro monotonia, consideriamo l'operatore

$$\mathscr{H}_{p,g} = -\frac{d^2}{dx^2} - 2\mathrm{i}p\frac{d}{dx} + p^2 + gv(x)$$

con autovalori ordinati in modo ascendente che denotiamo con  $\varepsilon_n(p,q)$ , n = 0, 1, 2, ...; il caso più interessante sarà, dato il problema che stiamo studiando in 1.1.3, quello per  $\varepsilon_n(p,1) := \varepsilon_n(p)$ .

D'altro canto denotiamo con  $\varepsilon_n^0(p) := \varepsilon_n(p, 0)$ . Di tali autovalori conosciamo tutto, perciò possono essere calcolati esplicitamente a partire dalla 1.3.11 considerando  $p \in (0, a)$ 

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^0(p) &= p^2, & \varepsilon_1^0(p) = (-2a+p)^2, \\ \varepsilon_2^0(p) &= (2a+p)^2, & \varepsilon_3^0(p) = (-4a+p)^2, \\ \varepsilon_4^0(p) &= (4a+p)^2, & \varepsilon_5^0(p) = (-6a+p)^2, \ldots \end{aligned}$$



Figura 1.1: Funzioni della banda in [0,a]

Le funzioni  $\varepsilon_n^0(p)$ , in (0, a) sono crescenti per n pari e decrescenti per n dispari.

Dallo studio della toeria perturbativa sappiamo  $\varepsilon_n(p,q)$  sono funzioni continue in p, g per  $p \in [0, a]$ , e  $g \in [0, 1]$  (analitiche se  $p \in (0, a)$ ).

Per ogni g fissato gli autovalori devono essere strettamente monotoni in p. Chiaramente la direzione dell'aumento di  $\varepsilon_n(\cdot, g)$ , non cambia per piccole variazioni di g. Inoltre, dalla la connessione dell'intervallo [0,1], questa direzione non dipenderà da g. In questo modo siamo arrivati al seguente risultato:

**Proposizione 1.3.9.** Le funzioni della banda di energia  $\varepsilon_0(p), \varepsilon_2(p), \varepsilon_4(p), \dots$  sono strettamente crescenti in [0,a], mentre le funzioni della banda  $\varepsilon_1(p), \varepsilon_3(p), \varepsilon_5(p), \dots$  sono strettamente decrescenti in [0,a].

Da tale proposizione possiamo ottenere importanti informazioni sulla funzione D(E). Notiamo, innanzitutto, che se  $E = \varepsilon_n(p)$ , allora i relativi moltiplicatori delle autofunzioni associati sono  $\mu_1 = e^{ipL}, \mu_2 = e^{-ipL}$ , cosicchè

$$D(E) = D(\varepsilon_n(p)) = \frac{1}{2}(e^{ip\mathbf{L}} + e^{-ip\mathbf{L}}) = \cos(p\mathbf{L}).$$

In tal modo è evidente che D(E) è strettamente decrescente in tutti gli intervalli del tipo  $[\varepsilon_n(0), \varepsilon_n(a)]$ con  $n \in \mathbb{N}$  pari, e strettamente crescente in tutti quelli del tipo  $[\varepsilon_m(0), \varepsilon_m(a)]$  con  $m \in \mathbb{N}$  dispari. E importante osservare che i valori del quasi-momento p = 0 e p = a corrispondono rispettivamente a autofunzioni periodiche e antiperiodiche, in modo che  $\varepsilon_n(0)$  e  $\varepsilon_n(a)$  siano gli autovalori periodici e antiperiodici. Come sappiamo tali autovalori sono i bordi della zona che abbiamo chiamato  $\mathbb{D}(E)$ . Così, gli autovalori periodici della forma

$$\lambda_n = \varepsilon_n(0), \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sono ordinati come segue

$$\lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$$

mentre gli autovalori antiperiodici

$$\eta_n = \varepsilon_n(a), \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sono tali che

$$\eta_0 \le \eta_1 \le \eta_2 \le \dots$$

Da questo ordinamento deriva il seguente risultato

$$\lambda_0 < \eta_0 \le \eta_1 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \eta_2 \le \eta_3 < \lambda_3 \le \lambda_4 < \dots$$



Gli intervalli  $[\lambda_0, \eta_0]$ ,  $[\eta_1, \lambda_1], [\lambda_2, \eta_2]$ , ..., in cui  $|D(E)| \leq 1$  sono le zone permesse o zone di spettro. L'unione di queste zone consiste con l'insieme di tutte le funzioni  $\varepsilon_n(p)$  con n = 0, 1, 2, ... Gli intervalli  $(-\infty, \lambda_0), (\eta_0, \eta_1), (\lambda_1, \lambda_2), (\eta_2, \eta_3)$ , dove |D(E)| > 1 vengono chiamati gaps o lacune.  $\Box$ 

Grazie a questi lemmi abbiamo dimostrato il teorema 1.1.1 che caratterizza completamente lo spettro dell'operatore di Schrödinger con potenziale periodico.

### 1.4 Espansione in autofunzioni di Bloch

Abbiamo visto come le autofunzioni di Bloch siano, in generale, elementi dello spazio di Banach  $C_{loc}^2$ .

In questa sezione mostreremo che tali autofunzioni di Bloch  $\psi_n(p, x)$  con  $p \in \mathcal{B}, n = 0, 1, 2, ...$  come costruite nella sezione precedente, costituiscono un set completo di autofunzioni ortonormali per lo spazio  $L^2(\mathbb{R})$ , in modo tale che qualsiasi funzione d'onda definita in tale spazio di Hilbert potrà essere scritta come combinazione lineare di queste autofunzioni. Effettueremo così quella che viene comunemente chiamata decomposizione spettrale dell'operatore  $\mathcal{H}$ .

Abbiamo visto nella sezione precedente che $E\in\mathbb{R}$ appartiene allo spettro di $\mathscr{H}$ se e solo se il problema

$$\begin{cases} \mathscr{H}\psi = E\psi\\ \psi(x+L) = e^{ipL}\psi(x) \end{cases}$$
(1.4.1)

ammette soluzione non banale per qualche  $p \in \mathcal{B}$ . Allo stesso modo, imponendo  $\psi(x) = e^{ipx}\phi(x)$ per  $\phi$  L-periodica, 1.4.1 vale se e solo se esiste  $p \in \mathcal{B}$  e  $\phi \in L^2_{per}(0, L)$  non banale tale che

$$E\phi = \mathscr{H}_p \phi.$$

dove  $\mathscr{H}_p$ , come definito in 1.3.9, è chiamato *operatore di Bloch*. Per ogni valore di p tale operatore di Bloch agisce sullo spazio  $L^2_{per}(0, L)$  nel quale è essenzialmente autoaggiunto. Infatti esso è chiuso in  $L^2_{per}$  e definito sul dominio denso delle funzioni  $\mathcal{C}^{\infty}_{per}(0, L)$ .

Come discusso precedentemente, tale operatore di Bloch ammette inverso compatto. Proprio per questo motivo lo spettro di tale operatore è discreto, ossia consiste in un insieme di autovalori isolati di molteplicità algebrica finita che dipendono in maniera continua dal parametro p.

Dalla teoria di Bloch che abbiamo studiato nella sezione precedente, sappiamo che lo spettro di  $\mathscr{H}$  consiste nell'unione delle immagini delle curve continue  $\varepsilon_n(p)$  che corrispondono agli autovalori degli operatori di Bloch associati (vedi figura 3.1). In altri termini

$$\sigma_{L^2(\mathbb{R})}(\mathscr{H}) = \bigcup_{p \in \mathcal{B}} \sigma_{L^2(0, \mathbf{L})}(\mathscr{H}_p).$$

Da questa scrittura risulta evidente la necessità di decomporre qualsiasi funzione in  $L^2(\mathbb{R})$  in funzioni della forma  $e^{ipx}w(x)$  con  $p \in \mathcal{B}$  e  $\phi \in L^2_{per}(0, L)$ .

Tale decomposizione deriva inizialmente dalla seguente

**Osservazione 1.4.1.** Sia  $\hat{g}(\cdot)$  la trasformata di Fourier di una funzione g, definita come segue

$$\hat{g}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} g(x) dx, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Allora è semplice notare che per ogni g nello spazio di Schwartz valgono le seguenti relazioni

$$2\pi g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} \hat{g}(p) dp = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{-a}^{a} e^{i(p + \frac{2\pi\ell}{L})x} \hat{g}(p + \frac{2\pi\ell}{L}) dp = \int_{-a}^{a} e^{ipx} \check{g}(p, x) dp.$$
(1.4.2)

Grazie a questa osservazione abbiamo ottenuto quella che viene comunemente definita decomposizione di Bloch di una generica funzione  $g \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$g(x) = \int_{-a}^{a} e^{\mathrm{i} p x} \check{g}(p, x) dp \quad \mathrm{con} \quad \check{g}(p, x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{\mathrm{i} \frac{2\pi\ell}{\mathrm{L}} x} \hat{g}(p + \frac{2\pi\ell}{\mathrm{L}}).$$

**Osservazione 1.4.2.** Per ogni  $p \in \mathcal{B}$  fissato, la funzione  $\check{g}(p, \cdot)$  è periodica di periodo L.

A questo punto abbiamo ogni elemento per definire la trasformata di Bloch come

$$\begin{split} \mathbb{B} &: L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow L^2([-a,a];L^2_{per}(0,\mathbf{L})) \\ &g \Rightarrow \check{g}(p,\cdot) \end{split}$$

dove  $\check{g}$  è come definita in 1.4.2.

La disuguaglianza di Parseval per la trasformata di Fourier ci assicura che la trasformata di Bloch è un operatore lineare e limitato:

$$\|g\|_{L^2_{\mathbb{R}}}^2 = \frac{1}{2\pi L} \int_{-a}^{a} (\int_{0}^{L} |\mathbb{B}(g)(p,x)|^2 dx) dp = \frac{1}{2\pi L} \|\mathbb{B}(g)\|_{L^2([-a,a];L^2_{per}(0,L))}^2 dx) dp = \frac{1}{2\pi L} \|\mathbb{B}(g)\|_{L^2([-a,a];L^2_{per}(0,L))}^2 dx dp = \frac{1}{2\pi L} \|\mathbb{B}(g)\|_{L^2([-a,a];L^2_{per}($$

A questo punto è triviale studiare l'azione dell'operatore iniziale sulle funzioni decomposte con la trasformata di Bloch:

$$\mathscr{H}\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \mathscr{H}[e^{\mathbf{i}px}\check{\psi}(p,x)]dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{\mathbf{i}px} \mathscr{H}_{p} \ \check{\psi}(p,x)dp$$

dove ora  $\check{\psi}(p,x) \in L^2_{per}(0,L)$ . In questo modo l'operatore  $\mathscr{H}$  è diagonale sulle funzioni espanse con tale trasformata di Bloch: infatti per ogni p fissato ho un set  $\{\xi_n(p,x)\}$  tale che

$$\mathscr{H}_p \ \xi_n(p,x) = \lambda_n(p)\xi_n(p,x)$$

ed espandendo  $\check{\psi}$  lungo tali autofunzioni come segue:  $\check{\psi}(p,x) = \sum_n \check{\psi}_n(p)\xi_n(p,x)$ , ottengo che

$$\mathscr{H}\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{ipx} \sum_{n} \check{\psi}_{n}(p)\lambda_{n}(p)\xi_{n}(p,x)$$

ossia la sua azione è diagonale, come volevamo dimostrare.

Studiamo ora l'evoluzione del generico stato quantistico  $\vartheta(t,p,x)$  decomposto con la trasformata di Bloch, infatti risolvendo

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}\vartheta(t,p,x)=\mathscr{H}\vartheta(t,p,x)\quad \mathrm{dove}\quad \vartheta(t,p,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{\mathrm{i}px}\sum_{n}\check{\vartheta}_{n}(t,p)\xi_{n}(p,x)dp$$

si trova

$$\frac{d}{dt}\check{\vartheta}_n(p,t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\lambda_n(p)\check{\vartheta}_n(p,t) \Longleftrightarrow \check{\vartheta}_n(p,t) = e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\lambda_n(p)t}\check{\vartheta}_n(p,0)$$

e dunque

$$\vartheta(t,p,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{ipx} \sum_{n} e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_n(p)t} \check{\vartheta}_n(p,0)\xi_n(p,x)dp$$

che rappresenta un'estensione a quanto detto nel caso discreto in 1.2.

### Capitolo 2

### Caso periodico: teoria di Floquet

Come abbiamo già visto nell'introduzione, parallelamente alla teoria di Bloch con cui si è costruita la base matematica per descrivere la struttura quantistica della materia condensata, le stesse equazioni differenziali nel caso di potenziali periodici sono state studiate dalla teoria di Floquet sviluppata nel contesto dei sistemi dinamici, ottenendo dei risultato piuttosto eleganti.

Nella meccanica quantistica l'equazione era presentata nella sua dipendenza spaziale; il punto di vista dei sistemi dinamici, invece, è basato sulla dipendenza temporale della soluzione. Nel caso dell'equazioni unidimensionali è completamente indifferente se consideriamo il nostro grado di libertà come spaziale o temporale. Vengono riportate in questi modi differenti soltanto per un motivo "storico".

Le due teorie portano, ovviamente, agli stessi risultati, ma da approcci completamente diversi. É bene, dunque, richiamare tale teoria nella sua visione nei sistemi dinamici.

Consideriamo dunque il sistema dinamico di dimensione n descritto da

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad \text{dove} \quad A(t+T) = A(t) \quad \forall \ t \in \mathbb{R}$$
 (2.0.1)

dove A(t) è una funzione che, oltre ad essere periodica di periodo T, la supponiamo almeno continua in t.

**Lemma 2.0.1.** Sia  $\Phi(t)$  la matrice fondamentale di 2.0.1. Allora anche  $\Phi(t+T)$  lo è.

Dimostrazione. Dato che $\Phi$  è la matrice fondamentale di 2.0.1, allora

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T)$$

dove abbiamo usato la periodicità di A(t). Allora,  $\Phi(t+T)$  è una matrice di soluzioni di 2.0.1 e

$$\det \Phi(t+T) \neq 0$$

dalla formula di Abel, perciò essa risulta essere una matrice fondamentale di 2.0.1.  $\Box$ 

**Osservazione 2.0.2.** Da quanto detto nel lemma precedente esisterà una matrice costante ed invertibile C tale che

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) \ \mathcal{C} \quad \forall \ t \in \mathbb{R}.$$

Tale matrice è detta matrice di Monodromia.

Ora, se una matrice  $\mathcal{C}$  è invertibile sui complessi, esisterà sempre una matrice complessa  $\mathcal{D}$  tale che

$$\mathcal{C} = e^{\mathcal{D}T}.\tag{2.0.2}$$

Dove  $\mathcal{D}$  sarà determinata a meno di multipli interi di  $\frac{2i\pi}{T}I$ .

Ci chiediamo ora come siano caratterizzate le matrici fondamentali di 2.0.1. Per questo enunciamo il seguente risultato:

**Teorema 2.0.3** (FLOQUET). Sia A(t) una matrice  $n \times n$  periodica di periodo T e sia  $\Phi(t)$  una matrice fondamentale di 2.0.1.

Allora esistono una matrice periodica non singolare  $\mathcal{P}(t)$  di periodo T ed una matrice costante  $\mathcal{D}$  tali che

$$\Phi(t) = \mathcal{P}(t)e^{\mathcal{D}t}.$$
(2.0.3)

La forma di questa matrice fondamentale richiama evidentemente le funzioni di Bloch.

Dimostrazione. Scegliamo la matrice  $\mathcal{D}$  un logaritmo della matrice costante  $\mathcal{C}$  come in 2.0.2. A questo punto ci basta definire

$$\mathcal{P}(t) := \Phi(t) e^{-\mathcal{D}t}$$

per verificare che essa è invertibile in quanto prodotto di due matrici invertibile, ed essa è periodica, ossia che

$$\mathcal{P}(t+T) = \Phi(t+T)e^{-\mathcal{D}(t+T)} = \Phi(t)e^{-\mathcal{D}t} = \mathcal{P}(t).$$

**Definizione 2.0.4.** Gli autovalori  $\rho_i \in \mathbb{C}$  della matrice di monodromia  $\mathcal{C}$  sono detto **moltiplicatori** caratteristici del sistema 2.0.1.

I numeri complessi  $\lambda_i$  definiti da  $\rho_i = e^{\lambda_i T}$  sono detti **esponenti caratteristici** del sistema 2.0.1.

**Osservazione 2.0.5.** Dato che la matrice di monodromia è invertibile, nessun moltiplicatore caratteristico si può annullare. Inoltre, dal fatto che gli esponenti caratteristici sono definiti a meno di multipli interi di  $\frac{2\pi i}{T}$ , possiamo sceglierli in modo che essi coincidano con gli autovalori di  $\mathcal{D}$ .

Poichè cambiare la matrice fondamentale di 2.0.1 non varia lo spettro della matrice di monodromia, possiamo scegliere tale matrice fondamentale in modo che essa presenti come dato iniziale in  $t = t_0$  la matrice identità. Tale matrice sarà dunque soluzione di:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \\ \Phi(0) = \mathbf{I} \end{cases}$$
(2.0.4)

Le conseguenze del teorema di Floquet sono svariate, ne riportiamo solo le più importanti:

**Teorema 2.0.6.** Sia  $\mathcal{P}(t)$  la matrice periodica del teorema 2.0.3 e sia  $\mathcal{D}$  la matrice tale che  $\mathcal{C} = e^{\mathcal{D}T}$ . Allora il cambiamento di coordinate definito da

$$\xi(t) = P(t)y(t) \tag{2.0.5}$$

coniuga il sistema 2.0.1 nel sistema lineare a coefficienti costanti

$$\dot{y} = \mathcal{D}y. \tag{2.0.6}$$

Dimostrazione. Partendo dal cambio di coordinate 2.0.5, abbiamo

$$\dot{\xi} = A\xi = \dot{\mathcal{P}}y - \mathcal{P}\dot{y} \iff \dot{y} = \mathcal{P}^{-1}[A\mathcal{P} - \dot{\mathcal{P}}]y$$

ma ci ricordiamo che

$$\dot{\mathcal{P}} = \dot{\Phi}e^{-\mathcal{D}T} - \Phi e^{-\mathcal{D}T}\mathcal{D} = A\Phi e^{-\mathcal{D}T} - \mathcal{P}\mathcal{D} = A\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{D}$$

sostituendo arriviamo banalmente a

 $\dot{y} = \mathcal{D}y.$ 

Tale teorema ci permette in maniera molto agile di caratterizzare le soluzioni di 2.0.1. Queste saranno fortemente caratterizzate dallo spettro della matrice  $\mathcal{D}$  in quanto i cambiamenti di coordinate che coniugano 2.0.1 con 2.0.6 sono descritti da matrici periodiche, e perciò le soluzioni del sistema iniziale saranno il prodotto tra funzioni periodiche e le soluzioni di 2.0.6.

In particolare le soluzioni dipenderanno dalla parte reale degli autovalori di  $\mathcal{D}$ , ossia dalla parte reale degli esponenti caratteristici. Per questo possiamo distinguere due casi:

- se  $Re(\lambda_i) < 0 \forall i = 1, ..., n$  ossia  $|\rho_i| < 1$ , allora le soluzioni del sistema tendono a 0 nel limite  $t \longrightarrow +\infty$ .
- se  $\exists \lambda_j$  tale che  $Re(\lambda_j) > 0$ , ossia se  $|\rho_j| > 1$ , allora esiste una soluzioni che esegue oscillazioni di ampiezza illimitata per  $t \longrightarrow \infty$ .

Ovviamente il caso con parte reale nulla è stato già richiamato prima, in quanto rappresenta le soluzioni che oscillano in maniera periodica.

Vediamo ora come vengono caratterizzate le soluzioni periodiche del sistema 2.0.1.

**Teorema 2.0.7.** Una soluzione  $\xi(t)$  di 2.0.1 soddisfa la condizione

$$\xi(t+T) = k \ \xi(t), \ t \in \mathbb{R}$$

$$(2.0.7)$$

per un valore costante di k se e solo se k è autovalore della matrice di monodromia  $\mathcal{C} = e^{\mathcal{D}T}$ .

Dimostrazione. Dalla matrice fondamentale che soddisfa 2.0.4 per cui possiamo dire che

$$\xi(t) = \Phi(t)\xi(0)$$

ossia che

$$\xi(t+T) = \Phi(t+T)\xi(0) = \Phi(t) \ C \ \xi(0).$$

Perciò, se il dato iniziale è autovettore della matrice C corrispondente all'autovalore k, il teorema è banalmente verificato.

Al contrario, se vale 2.0.7, allora

$$\xi(t+T) = \Phi(t)\mathcal{C}\xi(0) = k \ \Phi(t)\xi(0)$$

e dall'invertibilità di  $\Phi$ ricaviamo la veridicità del risultato.

Di fondamentale importanza sono i due casi per  $k = \pm 1$ .

- se k = 1 abbiamo dunque che affinchè esista soluzione periodica di periodo T per 2.0.1, la matrice C deve avere 1 come autovalore.
- se k = -1, allora

$$\xi(t+2T) = -\xi(t+T) = \xi(t) \ \forall \ t \in \mathbb{R}$$

e dunque affinchè il sistema 2.0.1 abbia soluzione periodica di periodo 2T, la matrice di monodromia deve avere autovalore -1. Tali soluzioni, come abbiamo già visto nella trattazione precedente, sono le soluzioni *antiperiodiche*.

Nel caso in cui A(t) sia reale, invece, non sarà possibile scrivere la matrice fondamentale come in 2.0.3 poichè C in generale non si potrà scrivere come esponenziale di matrice reale.

Ma per risolvere questo problema basta notare che in tal caso potremo scrivere

$$\mathcal{C}^2 = e^{2\mathcal{D}T}, \quad \text{con} \quad \mathcal{D} \in Mat(\mathbb{R})$$

e dunque basterà raddoppiare il periodo alla matrice fondamentale per trovare una matrice P(t) periodica di periodo 2T che definisce il cambiamento di coordinate

$$\xi(t) = P(t)y(t)$$

che coniuga il sistema al sistema lineare a coefficienti costanti 2.0.6.

### Capitolo 3

### Applicazioni a modelli di interesse fisico

Questo capitolo è dedicata ad applicare quanto abbiamo imparato sulla teoria di Floquet-Bloch per modelli di interesse fisico.

### 3.1 Modello di Kronig e Penney

L'applicazione più diretta della teoria di Bloch riguarda la fisica dello stato solido, e dunque la stretta connessione che esiste tra le proprietà fisiche di un solido e la sua struttura elettronica.

Per capire le proprietà elettriche dei solidi cristallini, e dunque per comprendere la divisione tra solidi conduttori, isolanti o semiconduttori, per esempio, si deve utilizzare la teoria delle bande energetiche, poichè non basta più considerare l'approssimazione di elettrone libero, ma è necessario tenere opportunamente conto del potenziale che tende a legare gli elettroni agli atomi del reticolo cristallino. Questa comprensione delle bande energetiche e di come esse sono legate alla conduzione elettrica di un solido è stata una delle prime importanti vittorie della meccanica quantistica.

Un modello molto semplice e tutt'oggi usato per capire la teoria a bande è quello introdotto da Kronig e Penney nel 1930.

Il punto di partenza per tale modello è di trascurare tutte le interazioni elettrone-elettrone che possono avvenire nel cristallo e i vari effetti di schermatura della carica nucleare.

Consideriamo un elettrone che risente del potenziale Coulombiano di un singolo atomo isolato del reticolo. Tale potenziale sarà espresso da

$$V = -k_0 \frac{Ze^2}{r}$$

e dunque può essere rappresentato come nella figura 3.1.

Ora, dunque, un'elettrone che si muove in una sola dimensione in un cristallo, risentirà della sovrapposizione dei vari potenziali generati da tutti gli atomi disposti periodicamente nel reticolo. Tale sovrapposizione, se trascuriamo tutte le altre interazioni, genererà un potenziale periodico che avrà una forma come questa vista nella figura 3.2.

Possiamo notare come all'interno del solido il potenziale non tenda asintoticamente a zero, come nel caso di un atomo isolato, ma è una funzione periodica costituita da una successione di rami di iperbole che intersecandosi genera massimi di intensità generica U localizzati nei punti medi tra due nuclei vicini.

Vediamo ora come Kronig e Penney ottennero la prima dimostrazione analitica della presenza delle bande energetiche.



Figura 3.1: Potenziale che risente un'elettrone dall'interazione con un atomo isolato



Figura 3.2: Potenziale che risente un elettrone in un solido cristallino, ottenuto dalla sovrapposizione dei potenziali generati dai singoli atomi, rappresentati dalle curve tratteggiate.

L'idea alla base è quella di sostituire i picchi di potenziale generati dai rami di iperbole raffigurati nella figura 3.2 con delle barriere di potenziale aventi altezza U. Data la disposizione cristallina, le barriere saranno disposte periodicamente lungo tutto il reticolo, che consideriamo di lunghezza infinitamente grande rispetto all'ampiezza delle barriere.

Il periodo di tale potenziale sarà pari alla cella della reticolo, che nel caso che prenderemo in studio sarà a+b.



Figura 3.3: Potenziale periodico nel modello di Kronig e Penney

Dunque studiamo il nostro operatore

$$\mathscr{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + v(x), \quad \text{dove} \quad v(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, a] \\ U & \text{se } x \in [-b, 0) \end{cases}$$

Ora risolviamo l'equazione spettrale di Schrödinger

$$\mathscr{H}\psi = E \psi$$

dove assumiamo per considerare gli stati legati che E < U. Essa ammette soluzioni diverse a seconda della regione dello spazio in cui ci troviamo:

$$\begin{cases} \psi_1(x) = Ae^{iKx} + Be^{-iKx}, & \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = E, \text{ per } x \in [0, a] \\ \psi_2(x) = Ce^{Qx} + De^{-Qx}, & \frac{\hbar^2 Q^2}{2m} = U - E, \text{ per } x \in [-b, 0) \end{cases}$$

Le costanti A,B,C e D possono essere trovare imponendo la continuità della funzione d'onda e della sua derivata prima in x = 0 e in x = a. In x = 0 deve valere che

$$A + B = C + D$$
 e  $iK(A - B) = Q(C - D),$  (3.1.1)

mentre per studiare quanto succede in x = a usiamo il teorema di Bloch osservando che

$$\psi(x+a) = e^{ik(a+b)}\psi(x-b)$$
(3.1.2)

dove k è quello che abbiamo chiamato quasi momento.

Per quanto riguarda l'intorno sinistro di x = a sappiamo banalmente che  $\psi(a^-) = \psi_1(a^-)$ , mentre per quanto riguarda la destra di a usiamo la 3.1.2 e imponiamo

$$\psi(a^+) = e^{ik(a+b)}\psi_2(-b^+)$$

Lo stesso vale per le derivate prime, e otteniamo così le condizioni

$$Ae^{iKa} + Be^{-iKa} = e^{ik(a+b)}(Ce^{-Qb} + De^{Qb}) \quad e \quad iK(Ae^{iKa} - Be^{-iKa}) = Qe^{ik(a+b)}(Ce^{-Qb} - De^{Qb}).$$
(3.1.3)

Le equazioni 3.1.1,3.1.3 ammettono soluzioni se la matrice dei coefficienti

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ iK & -iK & -Q & Q \\ e^{iKa} & e^{-iKa} & -e^{iK(a+b)-Qb} & -e^{iK(a+b)+Qb} \\ iKe^{iKa} & -iKe^{-iKa} & -Qe^{iK(a+b)-Qb} & Qe^{iK(a+b)+Qb} \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo. Tale condizione si traduce in

$$\cos \left[k(a+b)\right] = \cos \left(Ka\right) \cosh \left(Qb\right) + \frac{Q^2 - K^2}{2KQ} \sin \left(Ka\right) \sinh \left(Qb\right)$$
  
dove  $K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \ Q = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}$  (3.1.4)

E è l'energia dell'elettrone, e U l'altezza della barriera.

**Osservazione 3.1.1.** se  $U \longrightarrow 0$ ,  $b \longrightarrow 0$ , ritroviamo il caso della particella libera, infatti

$$K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = k, \quad Q = \sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}} = \mathrm{i}k, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Ora per studiare le bande di energia introduciamo i parametri

$$\varepsilon = K^2(a+b)^2, \quad u = Q^2(a+b)^2 + \varepsilon, \quad k(a+b) = \xi, \quad \alpha = \frac{a}{b}$$

in modo tale che

$$Ka = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\alpha}, \quad Qb = \frac{\alpha}{1+\alpha}\sqrt{u-\varepsilon}$$

e dunque la relazione 3.1.4 si può riscrivere come

$$\cos\xi = \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\alpha}\right)\cosh\left(\frac{\alpha\sqrt{u-\varepsilon}}{1+\alpha}\right) + \frac{u-2\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{u-\varepsilon}}\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\alpha}\right)\sinh\left(\frac{\alpha\sqrt{u-\varepsilon}}{1+\alpha}\right)$$
(3.1.5)

rendendo la relazione di dispersione energetica dipendente solo da  $u, \alpha$ .

Come sappiamo, i valori di energia permessi sono quelli che soddisfano tale relazione, perciò, dato che il cos $\xi$ oscilla tra -1 e 1, se chiamo

$$\mathcal{D}(E) = \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\alpha}\right)\cosh\left(\frac{\alpha\sqrt{u-\varepsilon}}{1+\alpha}\right) + \frac{u-2\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{u-\varepsilon}}\sin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\alpha}\right)\sinh\left(\frac{\alpha\sqrt{u-\varepsilon}}{1+\alpha}\right)$$

allora avremo che i valori (o bande) di energia permessi sono quelli per  $|\mathcal{D}(E)| \leq 1$ , mentre risulteranno i gaps di energia quando  $|\mathcal{D}(E)| > 1$ .



Figura 3.4:  $\mathcal{D}(E)$  Vs E

Come possiamo vedere, le zone verdi rappresentano i gaps di energia, mentre le zone non colorate sono le bande di energia permesse.

Per osservare il diagramma Energia-quasi momento che ci aiuta a visualizzare meglio le bande di energia, basta fissare un valore dei parametri  $u, \alpha$  e plottare la funzione 3.1.5.

Il gap energetico è sempre quello evidenziato in verde, ed esso separa la banda di valenza dalla banda di conduzione. La banda di conduzione sarebbe la banda meno energetica vuota o semipiena, mentre quella di valenza è la banda piena con energia più elevata.

E' proprio questo gap che differenzia la conduttività elettrica dei solidi.

Se le due bande sono adiacenti o addirittura parzialmente sovrapposte, gli elettroni non trovano impedimenti energetici per passare dall'una all'altra, si tratta perciò di un conduttore. Se il gap energetico è presente ma vale meno di 1.6 eV, si tratta di un semiconduttore, mentre se il gap è maggiore di 1.6 eV parliamo di un isolante elettrico.



Figura 3.5: Bande energetiche

**Osservazione 3.1.2.** Si può arrivare a tali risultati in maniera più agevole se si considera il limite in cui il potenziale diventa un potenziale periodico con le barriere a delta di Dirac.

Questo limite in cui le barriere tendono a delle distribuzioni di tipo delta di Dirac è espresso dalle condizioni

$$b \longrightarrow 0, \quad U \longrightarrow \infty$$

in modo tale che il prodotto  $Ub \longrightarrow 1$ .

Considerando questo limite l'equazione 3.1.4 diventa molto più semplice poichè possiamo considerare

$$K \ll Q, \ Qb \ll 1, \ \text{per cui} \ \cosh\left(Qb\right) \simeq 1, \ e \quad \frac{Q^2 - K^2}{2KQ} \sinh\left(Qb\right) \simeq \frac{Q^2}{2KQ} (Qb) = \frac{abQ^2}{2} \frac{1}{Ka} = \frac{1}{Ka} \left(\frac{Qb}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{Q$$

Con queste considerazioni posso riscrivere l'equazione 3.1.4 come

$$\cos(ka) = \cos(Ka) + \frac{abQ^2}{2} \frac{\sin(Ka)}{Ka}.$$

**Osservazione 3.1.3.** *il parametro*  $L = \frac{abQ^2}{2}$  *è una costante.* 

Deriva banalmente dal fatto che in tale limite  $Q \approx \sqrt{U}$ .

Dunque è possibile fissare L, e al variare di tale parametro disegnare le varie bande energetiche, il risultato che si ottiene è uguale quello mostrato nelle figure precedenti.

### 3.2 Un'introduzione agli Isolanti Topologici

#### Introduzione

Abbiamo visto come la teoria a bande dia una semplice spiegazione di come un solido cristallino possa essere un isolante, un conduttore o un semiconduttore elettrico. La scoperta dell'effetto Hall

quantistico (1980) ci ha mostrato come la semplice divisione di bande tra isolanti e conduttori non sia il punto di arrivo nello studio delle proprietà elettriche dei solidi, ma che sia necessaria una comprensione più profonda.

In tale effetto, un campo magnetico intenso confina il moto degli elettroni all'interno del conduttore, ma lo stesso campo di forze li direziona lungo degli stati delocalizzati al bordo del materiale.

In questo modo, un metallo bidimensionale in un forte campo magnetico si comporta come un isolante nella maggior parte del suo volume, ma conduce la corrente lungo la sua superficie grazie a un numero discreto di stati di bordo. Il numero di questi stati di bordo è legato a degli invarianti topologici che vedremo, in maniera semplificata, nel corso della nostra trattazione.

Negli ultimi 20 anni la ricerca scientifica ha mostrato come non serva un campo magnetico per donare a un isolante degli stati conduttori al bordo: le responsabili sono delle proprietà topologiche non banali delle bande occupate dagli elettroni.

Proprio per queste proprietà di conduzione al bordo che si conservano anche sotto delle perturbazioni al sistema, gli isolanti topologici rivestono un ruolo cruciale nella ricerca contemporanea sulla fisica dei solidi.

In questa sezione vedremo solo una concisa descrizione di un modello unidimensionale che ci dà un'idea degli isolanti topologici. Questo modello è un'ottima introduzione per studiare le estensioni ad alte dimensioni che non saranno riportate in questa tesi ma che si possono trovare facilmente nella letteratura.

Prima di iniziare a studiarlo, però, vediamo alcuni risultati e strumenti che utilizzeremo.

#### Approssimazione di legame stretto

Per comprendere la trattazione del modello unidimensionale è bene capire l'approssimazione di legame stretto che sta alla base della trattazione.

Immaginamo di costruire una catena unidimensionale di atomi idrogenoidi distanziati dal passo reticolare *a* con condizioni periodiche al contorno. Quando due di questi atomi risultano abbastanza vicini tra loro, i rispettivi orbitali non si possono più trattare separatamente, ma si mischiano formando gli orbitali di legame e di antilegame. Al crescere del numero di atomi che si avvicinano, per formare la struttura cristallina, la sovrapposizione quantistica fa sì che gli elettroni si delocalizzino lungo la catena "saltando" da un atomo ad un altro. La prima approssimazione che faremo è che trascureremo tutte le interazioni elettrone-elettrone e atomo-atomo, oltre che le varie schermature di carica.

In questa approssimazione, che può considerarsi valida solo atomi molto vicini tra loro, l'Hamiltoniana del sistema sarà descritta da

$$\mathscr{H} = -\sum_{i,j} t_{i,j} \left| i \right\rangle \left\langle j \right| \tag{3.2.1}$$

dove i, j rappresentano i siti della catena e dunque  $|i\rangle$  vive nello spazio delle fasi  $\{0, 1\}^N$ , mentre  $-t_{i,j}$  rappresenta il potenziale di hopping dell'elettrone nell' i - esimo sito dall'atomo del j - esimo sito. Ovviamente imponiamo che la matrice sia Hermitiana, e quindi che  $t_{i,j} = t_{j,i}$ , e che  $t_{i,i} = 0$  per ogni sito i. D'ora in avanti assumeremo che l'interazione dipenda solo dalla distanza fra i siti e indicheremo  $t_{i,i+n} = t_n$ .

La semplificazione fondamentale di questo caso deriva proprio dalla teoria di Bloch. Difatti il potenziale che consideriamo è periodico nello spazio, ossia è invariante rispetto all'operatore di traslazione da un sito all'altro vicino definito da

$$T = \sum_{i} \left| i + 1 \right\rangle \left\langle i \right|$$

Da queste considerazioni possiamo scrivere

$$\mathscr{H} = -\sum_{n} t_{n} T^{n}; \quad [\mathscr{H}, T] = 0$$

ma sappiamo che le autofunzioni dell'operatore di traslazione sono le onde di Bloch

$$\left|k\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j}e^{ikj}\left|j\right\rangle.$$

Allora possiamo diagonalizzare l'Hamiltoniana nella base formata dalle onde di Bloch, notando che

$$T^m \left| k \right\rangle = e^{\mathrm{i}kma} \left| k \right\rangle$$

allora l'equazione di Schrödinger

$$\mathscr{H}\left|k\right\rangle = \varepsilon(k)\left|k\right\rangle$$

è risolta per

$$\varepsilon(k) = -\sum_{n} t_n e^{-ikna}.$$

Nell'approssimazione di legame stretto che ci servirà in seguito, supponiamo che un elettrone nel generico sito i possa saltare, e dunque risenta dell'attrazione solo dell'atomo posto nel sito vicino  $i \pm 1$ . In questo modo

$$t_n = 0 \ \forall \ n \neq 1; \qquad t_1 = t \neq 0$$

e dunque si ottiene

$$\varepsilon(k) = -2t\cos\left(ka\right).$$

#### Fase di Berry

E' importante ora fare una breve digressione su un concetto puramente quantistico molto interessante che sarà necessario in futuro: il concetto della fase di Berry.

Consideriamo, nel caso più generale possibile, un'Hamiltoniana  $\mathscr{H}(\mathbf{R})$  dove  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, ...)$ . Per ogni istante, e per un fissato vettore  $\mathbf{R}$ , è possibile ottenere la soluzione all'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo

$$\mathscr{H}(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle.$$
 (3.2.2)

La domanda che ci poniamo è come cambia lo stato  $|n(\mathbf{R}(t=0))\rangle$  per delle lente variazioni del vettore di parametri **R** lungo un generico cammino C.

Un risultato di Born-Fock, detto **teorema adiabatico** ci mostra come per lente variazioni dell'Hamiltoniana, il sistema inizialmente nell'autostato  $|n(\mathbf{R}(t=0))\rangle$  rimarrà per ogni tempo successivo nell'autostato istantaneo, ossia in  $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ . Questo teorema, però, non ci dice nulla sulla fase.

In generale, come abbiamo capito nel primo cqpitolo, possiamo scrivere lo stato del sistema al tempo t come

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\theta(t)} |n(\mathbf{R}(t))\rangle$$
(3.2.3)

che si evolverà nel tempo secondo l'equazione

$$\mathscr{H}(\mathbf{R}(t)) |\psi(t)\rangle = \mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$$

in cui possiamo sostituire 3.2.3 per ottenere

$$E_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle = \hbar(\frac{d\theta(t)}{dt}) |n(\mathbf{R}(t))\rangle + \mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt} |n(\mathbf{R}(t))\rangle.$$

Assumendo gli autostati di 3.2.2 ben normalizzati, questa equazione differenziale si può banalmente riscrivere come

$$\frac{1}{\hbar}E_n(\mathbf{R}(t)) - i\langle n(\mathbf{R}(t))|\frac{d}{dt}|n(\mathbf{R}(t))\rangle = \hbar(\frac{d\theta(t)}{dt})$$

da cui otteniamo esplicitamente

$$\theta(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\tau)) d\tau - i \int_0^t \langle n(\mathbf{R}(\tau)) | \frac{d}{d\tau} | n(\mathbf{R}(\tau)) \rangle d\tau.$$

Il primo termine è il solito termine di fase dovuto all'evoluzione temporale dell'Hamiltoniana, mentre il secondo termine è quello che viene comunemente chiamato la fase di Berry  $\gamma_n$ :

$$\gamma_n = i \int_0^t \langle n(\mathbf{R}(\tau)) | \frac{d}{d\tau} | n(\mathbf{R}(\tau)) \rangle d\tau$$

che con un cambio di variabili possiamo riscrivere come

$$\gamma_n = i \int_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}_t} \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle d\mathbf{R} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) d\mathbf{R}$$

dove  $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$  viene chiamato potenziale di Berry.

Dall'invarianza di gauge sappiamo che moltiplicando un generico stato per un fattore di fase globale

$$|n(\mathbf{R})\rangle \longrightarrow |\tilde{n}(\mathbf{R})\rangle = e^{\mathrm{i}\varphi(\mathbf{R})} |n(\mathbf{R})\rangle$$

la dinamica del sistema non cambia.

Questa invarianza non vale però nel potenziale di Berry che sotto trasformazione di gauge varia come

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \varphi(\mathbf{R}).$$

Conseguentemente la fase di Berry varierà di un fattore

$$-\int_{\mathcal{C}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\varphi(\mathbf{R})d\mathbf{R}=\varphi(\mathbf{R}_{0})-\varphi(\mathbf{R}_{t})$$

e dunque per imporre che la fase di Berry non vari sotto trasformazioni di gauge basta imporre che il cammino C su cui varia  $\mathbf{R}(t)$  sia un cammino chiuso.

#### Il modello SSH

Tale modello unidimensionale che vogliamo studiare è dovuto al lavoro dei fisici Su-Schrieffer-Heeger (SSH) e descrive fermioni privi di spin che risentono dell'attrazione di ioni posizionati in una catena unidimensione.

Questo modello deriva dallo studio del poliacetilene, una lungo polimero unidimensione formato dalla ripetizione della stesso monomero  $C_2H_2$ .

Ora al posto di studiare la semplice catena formata da un solo sito per ogni cella elementare descritta in 3.2.1, avremo la singola cella formata da due siti A e B. Il modello SSH è un modello che descrive questa catena formata da due siti per cella utilizzando l'approssimazione a legame stretto.

Nel corso della trattazione del modello imponiamo il passo reticolare, ossia la distanza tra due celle, a valere 2a = 1, e lavoriamo su fermioni privi di spin che dunque possono occupare singolarmente ogni cella a causa del principio di Pauli. Dunque ogni cella sarà riempita per metà. In questo modo, se studiamo solo la singola cella possiamo considerare come unico "spostamento" quello dell'elettrone che può saltare dal sito A al sito B o viceversa.



Figura 3.6: Rappresentazione grafica del modello SSH

Se indichiamo il potenziale di hopping all'interno della cella (dunque quello da A a B o viceversa) con v, mentre il potenziale di hopping tra celle vicine con w, allora possiamo scrivere l'Hamiltoniana come

$$\mathcal{H} = v \sum_{n=1}^{N} (|n, B\rangle \langle n, A| + h.c.) + w \sum_{n=1}^{N} (|n+1, A\rangle \langle n, B| + h.c.)$$
  
$$= v \sum_{n} (|n\rangle \langle n| \otimes |B\rangle \langle A|) + w (\sum_{n} |n+1\rangle \langle n| \otimes |A\rangle \langle B| + h.c.)$$
(3.2.4)

dove con la seconda riscrittura capiamo che l'intero spazio di Hilbert è decomposto in due parti: infatti  $|n\rangle \otimes |A \ o \ B\rangle$  vuol dire che lo spazio di Hilbert si divide in  $\mathcal{H}_{int} \otimes \mathcal{H}_{ext}$  dove la parte interna corrisponde ai due siti A, B nella cella unitaria, mentre la parte esterna consiste nella ripetizione per N celle.

Analizziamo ora il diagramma E Vs k, ossia la relazione di dispersione della nostra catena. Per fare questo ci concentriamo sull'interno dell'isolante, dunque consideriamo la catena con condizioni periodiche al contorno, in modo che non abbia dei bordi vuoti.

Grazie alla teoria di Bloch, dato che il sistema è invariante per simmetrie, possiamo scrivere, come abbiamo già fatto prima per il legame stretto:

$$|n\rangle \otimes |A \ o \ B\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k} e^{\mathbf{i}kn} \, |k\rangle \otimes |A \ o \ B\rangle$$

sostituendo questa espressione in 3.2.4 e imponendo le condizioni periodiche, otteniamo

$$\mathscr{H} = \sum_{k} (v + e^{-\mathrm{i}k}w) \left| k, B \right\rangle \left\langle k, A \right| + (v + e^{\mathrm{i}k}w) \left| k, A \right\rangle \left\langle k, B \right|.$$

Possiamo separare l'hamiltoniane esterne ed interne nel seguente modo

$$\mathscr{H} = \left|k\right\rangle \left\langle k\right| \otimes \left(v + e^{\mathrm{i}k}w\right) \left|A\right\rangle \left\langle B\right| + \left.\left|k\right\rangle \left\langle k\right| \otimes \left(v + e^{-\mathrm{i}k}w\right) \left|B\right\rangle \left\langle A\right|$$

che si può riscrivere come

$$\mathscr{H} = \sum_{k} |k\rangle H(k) \langle k|, \quad \text{dove} \quad H(k) = \begin{pmatrix} 0 & v + e^{ik}w \\ v + e^{-ik}w & 0 \end{pmatrix}$$

è l'hamiltoniana  $2 \times 2$  che agisce nello spazio di Hilbert interno alla catena per ogni k.

Ora procediamo con la diagonalizzazione di queste matrici H(k). Gli autovettori sono

$$|\pm k\rangle = \begin{pmatrix} \pm e^{-i\phi(k)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \phi(k) = \arctan\left(\frac{w\sin k}{v + w\cos k}\right)$$

con i rispettivi autovalori

$$E(k) = \pm \sqrt{v^2 + w^2 + 2vw\cos k}.$$

E' evidente che la relazione di dispersione varia al variare dei parametri  $v \in w$ , e da queste variazioni del gap potremmo trarre le nostre conclusioni fisiche. Infatti, si può vedere banalmente che finchè  $v \neq w$  si ha il gap energetico che conosciamo, e stiamo considerando un isolante elettrico, mentre per v = w il gap si chiude e, considerata l'energia di Fermi allo zero, possono esistere stati con energia arbitrariamente vicina a quella di Fermi, perciò in tale caso si ha un conduttore elettrico.

Da queste considerazioni possiamo pensare che il caso v > w sia esattamente identico al caso w > v, ossia che si abbia simmetria rispetto a v = w, ma questa analisi non è del tutto corretta. Infatti per comprendere quanto ci sfugge dobbiamo analizzare gli autovettori dell'Hamiltoniana, poichè essi nascondono gli aspetti "topologici" dell'isolante.

Iniziamo riscrivendo l'Hamiltoniana nella base delle matrici di Pauli (dato che essa è bidimensionale ed hermitiana)

$$H(k) = \vec{h}(k) \cdot \vec{\sigma}, \quad \text{dove} \quad \vec{h}(k) = \begin{pmatrix} v + w \cos k \\ w \sin k \\ 0 \end{pmatrix}.$$
(3.2.5)

Dato che la terza componente è nulla, nel piano  $h_x, h_y$ , la direzione del vettore  $\vec{h}(k)$  rappresenta un autostato, mentre il modulo darà il rispettivo autovalore.

Al variare di k nella zona di Brilluoin  $\vec{h}(k)$  mappa un insieme di punti, ognuno dei quali è associato ad un autostato del sistema. Quello che possiamo notare disegnando tale traiettoria sul piano  $h_x, h_y$  è che le due casistiche per v > w e v < w sono molto diverse. Dalla periodicità della zona di Brillouin, la traiettoria del vettore deve essere una curva chiusa, ma nel caso v < w, il vettore  $\vec{h}(k)$  si avvolge attorno all'origine, mentre nel caso v > w la curva chiusa che percorre non contiene l'origine!

Notiamo come l'origine è il punto dove  $\vec{h}(k) = 0$ , che corrisponde alla condizione di assenza di Gap. Difatti se disegnamo il caso v = w, la curva intersecherà l'origine indicando la presenza di uno stato metallico.

A questo punto chiamiamo il numero di avvolgimenti che la traiettoria di  $\vec{h}(k)$  compirà attorno all'origine con la lettera  $\nu$ . Tale numero distinguerà quei due casi che sembravano equivalenti.

Inoltre la zona di Brillouin è periodica, e dunque se la pensiamo come spazio in cui variano i parametri, e integriamo il potenziale di Berry per la banda riempita lungo tale zona, questo equivale a tracciare una linea chiusa che corrisponde a una fase di Berry invariante per trasformazioni di gauge. Se infatti calcoliamo il potenziale di Berry  $A_{-}$  in cui le variabili prima nominate come **R** ora sono k

$$A_{-}(k) = i \langle -(k) | \frac{d}{dk} | -(k) \rangle = -\frac{1}{2} \frac{d\phi(k)}{dk}$$

integrando tale potenziale lungo zona di Brillouin e normalizzando, troviamo:

$$-\frac{1}{\pi} \oint A_{-}(k) \, dk = \begin{cases} 1 & \text{se } v < w \\ 0 & \text{se } v > w \\ \text{non è definito } se & v = w \end{cases}$$

E questo è un modo per calcolare il numero di avvolgimenti  $\nu$ .

Il primo risultato evidente è che per v = w non è definito, difatti in quel caso non ha neanche senso il concetto di bande riempite poichè esso corrisponde a uno stato conduttore senza gap.

Il punto più importante nell'aver ottenuto questo risultato è che delle perturbazioni del sistema possono variare localmente il potenziale di Berry, ma quando esso viene integrato lungo l'intera zona di Brillouin, il numero di avvolgimenti resta costante! Questo può essere pensato come delle variazioni al vettore  $\vec{h}(k)$  che cambiano la sua traiettoria e deformano la circonferenza che descrive in 3.2.5; il numero di avvolgimenti della traiettoria, anche se il cerchio è deformato, resta invariato.

Questo ci dice che se vogliamo trasfomare l'Hamiltoniana variando i parametri  $v \in w$  in modo da passare da una fase isolante (v > w) all'altra (v < w) l'unico modo possibile è "attraversando l'origine". Ossia l'unico modo possibile per effettuare una transizione liscia da una fase isolante all'altra è quello di chiudere il gap di energia, passando per la fase metallica, o conduttrice. Questo processo è definito come una **transizione di fase topologica**.

Abbiamo visto queste differenze "topologiche" tra le diverse fasi, ora cerchiamo di capire le conseguenze fisiche di quanto detto finora.

La conseguenza più lampante è ovviamente la presenza di questi stati conduttori, noti come *stati* di bordo unidimensionali. Per studiare questi stati al bordo imponiamo delle condizioni aperte alla nostra Hamiltoniana. Senza la periodicità di tale operatore, e dunque senza l'ausilio della teoria di Bloch, caratterizzare l'Hamiltoniana è davvero complesso. Perciò non ne daremo una soluzione esatta, ma ci faremo solo un'idea per completare lo studio del modello.

Per iniziare, osserviamo i casi dei limiti "dimerizzati", ossia quelli per cui  $w = 0, v \neq 0$ , o  $w \neq 0, v = 0$ . Tale limite consiste nello spezzare la catena in dei dimeri:

- Il caso w = 0 è triviale. E' un caso di un problema ripetuto di interazione interna al singolo sito. Ovviamente gli elettroni non possono saltare da un dimero all'altro in assenza dell'interazione w, perciò questo caso corrisponde evidentemente alla fase isolante.
- Vediamo il caso v = 0. Date le condizioni aperte, nei due estremi della catena abbiamo due siti isolati. Se questi due siti possono ospitare un elettrone, tale particella avrà sicuramente energia pari a zero. Questo poichè nel modello che abbiamo costruito un elettrone fisso in un solo sito non ha energia. Dunque avendo due stati con energia zero nei due estremi della catena, ci aspettiamo di descrivere un isolante.


Figura 3.7: Spettro degli autovalori al variare di v a w = 1 fissato nel caso (a), mentre lo stesso spettro è rappresentato al variare di w a v = 1 fissato nel caso (b)

Ora si risolve numericamente l'hamiltoniana associata a condizioni al bordo aperte per osservare lo spettro e vedere se le considerazioni che abbiamo fatto in precedenza valgono.

Per i casi dimerizzati, le previsioni fatte prima erano corrette. Inoltre è interessante notare che esistono dei casi con energia zero anche al di fuori dei due limiti dimerizzati, per dei valori di v diversi da zero. Per chiarire la situazione disegnamo le autofunzioni corrispondenti a questi autovalori di energie.



Figura 3.8: Ampiezza delle autofunzioni per ogni sito nel caso della catena con b.c. aperte per N=10. I casi (a),(b) mostrano uno stato ad energia quasi zero per v = 0.3, w = 1, mentre in (c) è mostrato un generico stato con energia ben diversa da zero.

Gli stati con energia (arbitrariamente vicina a) zero sono esponenzialmente localizzati agli estremi della catena come ci aspettavamo dai limiti dimerizzati. Questi stati sono chiamati **stati di bordo**. Inoltre, questi stati di bordo rimangono ad energia zero finchè v < w. Appena v > w, non ci sono stati ad energia zero e tutti gli stati sono delocalizzati lungo il reticolo. E' proprio l'esistenza di questi stati di bordo che divide il caso v > w dal caso v < w. Entrambi i casi, però, guardando solo l'interno della catena, e dunque le b.c. periodiche, si comportano in maniera identica come isolanti.

In questo modo abbiamo trovato una conseguenza fisica alle proprietà "topologiche" che avevamo trovato prima: l'esistenza di stati di bordo. Il caso con numero di avvolgimenti  $\nu$  pari a 1 è detto caso topologicamente non triviale.

Questi due casi sono collegati dalla transizione di fase topologica in cui  $\nu$  non è definito, che corrisponde alla chiusura del gap che causa la presenza degli stati di bordo. Questa corrispondenza è trattata in maniera più attenta e precisa in [10].

Dunque guardando il problema con b.c. periodiche, ossia studiando il problema dell'interno della catena e calcolanto il numero di avvolgimenti, possiamo predirre l'esistenza degli stati di bordo. Per questo motivo la teoria di Bloch risulta fondamentale in quanto la parte più importante per predirre questi stati al bordo è proprio lo studio dell'operatore di Schrödinger quando è periodico.

# Capitolo 4 Caso periodico: approccio perturbativo

### 4.1 Impostazione del problema

Prendiamo ora in esame l'approccio perturbativo all'equazione 1.1.3. Per risolvere tale equazione si considera il potenziale come una piccola perturbazione del sistema libero.

Consideriamo solamente il caso in cui l'energia E è negativa, questo perchè il caso con energia positiva è di scarso interesse rispetto al caso negativo: i valori maggiori di zero sono quasi completamente nel risolvente, e dunque fuori dallo spettro continuo. Solo un piccolo intervallo di energie positive intorno all'origine avrà spettro continuo. Questo lo possiamo già intuire dal fatto che stiamo considerando delle piccole perturbazioni al sistema isolato; la trattazione più quantitativa di questo caso è stata riportata brevemente nell'appendice A.

Detto questo, per facilitarei le notazioni poniamo  $E = -\lambda^2$ , perciò possiamo riscrivere

$$u_{xx} + v(x)u = -\lambda^2 u, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

$$(4.1.1)$$

dove v è una funzione analitica e periodica di frequenza  $\omega \in \mathbb{R}$  tale che  $\omega = \frac{2\pi}{L}$ .

Partendo da tale equazione per rifarci alla teoria di Floquet trattiamo la variabile unidimensionale x come variabile temporale t senza perdere di generalità, e applicando il seguente cambio di variabili

$$q(t) = \sqrt{\lambda}u(t), \quad p(t) = \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{\lambda}}$$

ci riduciamo a un sistema dinamico al prim'ordine in  $\mathbb{R}^2$  descritto nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} \dot{p}(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda - \lambda^{-1} v(t) \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}.$$
(4.1.2)

Per approcciarsi a tale sistema risulta più comodo effettuare un cambio di variabili per studiare tutto nel campo complesso, definendo

$$z = \frac{p + iq}{\sqrt{2}}, \bar{z} = \frac{p - iq}{\sqrt{2}}, \quad \text{ossia} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \quad B := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ 1 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

e ottenendo il sistema in  $\mathbb{C}^2$  descritto in tale modo

$$\dot{\mathbf{w}} = M\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} z\\ \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad M = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} a(\lambda,t) & b(\lambda,t)\\ -\bar{b}(\lambda,t) & -a(\lambda,t) \end{pmatrix}.$$
(4.1.3)

Nel caso preso in esame è inoltre evidente che

$$a = -b = \frac{v}{2\lambda}.$$

Fissiamo le notazioni una volta per tutte, chiameremo infatti

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P(\lambda, t) = \mathbf{i} \begin{pmatrix} a(\lambda, t) & b(\lambda, t) \\ -\overline{b}(\lambda, t) & -a(\lambda, t) \end{pmatrix}.$$

Per l'analicità e la periodicità di v, abbiamo che  $a(\lambda, t) e b(\lambda, t)$  sono funzioni periodiche e analitiche nel tempo (addirittura  $a(\lambda, t)$  è una funzione reale), e dunque è possibile esprimere la matrice della perturbazione P come serie di Fourier in tal modo

$$P(\lambda,t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{P}(\lambda,\ell) e^{i\ell \cdot \omega t}, \quad \widehat{P}(\lambda,\ell) = i \begin{pmatrix} \widehat{a}(\lambda,\ell) & \widehat{b}(\lambda,\ell) \\ -\overline{\widehat{b}}(\lambda,-\ell) & -\widehat{a}(\lambda,\ell) \end{pmatrix}$$
(4.1.4)

dove  $\omega \in \mathbb{R}$  rappresenta la frequenza di v.

Introduciamo ora la seguente norma

**Definizione 4.1.1.** (NORMA) Data una matrice dipendente dal tempo  $M(t) \in Mat(n \times n, \mathbb{C})$ analitica e periodica con frequenza  $\omega = \frac{2\pi}{L}$ , ossia scrivibile come serie di Fourier

$$M(t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{M}(\ell) e^{\mathrm{i}\ell \cdot \omega t},$$

definiamo la seguente norma

$$|M(t)|_s = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{s|\ell|} \sqrt{\sum_{h,k} (\widehat{M}_{hk}(\ell))^2}$$

che possiamo scrivere come:

$$|M(t)|_s = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{s|\ell|} \sqrt{|M|_{HS}^2}$$

dove  $|\cdot|_{HS}$  è la norma di Hilbert-Schmidt come definita sopra.

Denotiamo con  $\mathcal{A}_s$  le matrici  $A \in Mat(2 \times 2, \mathbb{C})$  periodiche di periodo L ed analitiche tali che  $|A|_s < \infty$ .

Dato che la matrice in 4.1.4 rappresenta la perturbazione del sistema, per ipotesi abbiamo che  $|P(\lambda, t)|_s \ll 1$ .

**Proposizione 4.1.2.** Data la norma  $|\cdot|_s$  introdotta sopra, valgono le seguenti proprietà, che ci saranno utili nel corso della trattazione:

- $\bullet \ |[M,N]|_s \leq 2|M|_s \ |N|_s$
- $|\dot{N}|_{s_1} \le k(s-s_1)|N|_s \quad \forall \quad s_1 \le s$

Dimostrazione. Per dimostrare le prima proprietà bisogna prima notare che per la norma HS vale

 $|MN|_{HS} \le |M|_{HS}|N|_{HS}$ 

in quanto

$$|MN|_{HS} = \sqrt{\sum_{h,k} |(MN)_{hk}|^2} = \sqrt{\sum_{h,k,j} |M_{hj}N_{jk}|^2}$$

ma sappiamo che  $|M_{hj}N_{jk}|^2 \leq |M_{hj}|^2 |N_{jk}|^2$ e dunque

$$\sqrt{\sum_{h,k,j} |M_{hj}N_{jk}|^2} \le \sqrt{\sum_{h,j} |M_{hj}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j,k} |N_{jk}|^2} = |M|_{HS} |N|_{HS}.$$

Notato questo, basta utilizzare il fatto che per il prodotto tra le due matrici dipendenti dal tempo sviluppate in Fourier vale che

$$\widehat{M(t)N(t)} = \sum_{l_1+l_2=l} \widehat{M}(l_1)\widehat{N}(l_2)$$

e dunque che

$$\widehat{[N,M]}(\ell) = \sum_{\ell_1+\ell_2=\ell} [\widehat{M}(\ell_1), \widehat{N}(\ell_2)].$$

Passando alla norma, e usando la proprietà descritta prima

$$\begin{split} |[M,N]|_{s} &\leq \sum_{\ell} e^{s\,|\ell|} \cdot \sum_{\ell_{1}+\ell_{2}=\ell} |[\widehat{M}(\ell_{1}),\widehat{N}(\ell_{2})]|_{HS} \\ &\leq 2|M|_{s} \ |N|_{s}. \end{split} \\ \leq 2|M|_{s} \ |N|_{s}. \end{split}$$

Infine l'ultimo punto della proposizione viene dalla scrittura in serie di Fourier, difatti, notando che

$$|N|_{HS} = |\ell| \cdot |N|_{HS}$$

allora è immediato verificare che

$$|\dot{N}|_{\mathbf{S}_{1}} = \sum_{\ell} e^{(s_{1}-s)|\ell|} |\ell| e^{s|\ell|} |N|_{HS} = \sum_{\ell} |\ell| e^{(s_{1}-s)|\ell|} |N|_{s}.$$

Ma dato che  $s_1 \leq s$ , allora

$$|\dot{N}|_{\mathbf{S}_1} \le \sup_{\ell} e^{(s_1 - s)|\ell|} |\ell| |N|_s = k(s - s_1) |N|_s.$$

# 4.2 Preliminari

#### 4.2.1 Struttura algebrica e norma

Definiamo ora la struttura algebrica che sarà utile per affrontare l'approccio perturbativo, in quanto dotata di forti proprietà che verrano utilizzate nel corso della trattazione.

**Definizione 4.2.1** (ALGEBRA DI LIE). Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale V su un campo F munito di un operatore binario  $[\cdot, \cdot] : V \times V \Rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le seguenti proprietà:

• è bilineare, ossia  $\forall x, y \in z \in V, \forall \alpha, \beta \in F$  si ha che:

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z] \quad e \quad [x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]$$

• soddisfa l'identità di Jacobi, ossia  $\forall x, y \in z \in V$  si ha che:

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$$

• è nilpotente, ossia  $\forall x \in V$  si ha che [x, x] = 0

Si noti come la prima e la terza proprietà di quelle elencate sopra implichino l'antisimmetria dell'operatore.

**Lemma 4.2.2** (ALGEBRA DI LIE DELLE MATRICI  $2 \times 2$ ). Data una generica matrice  $M \in Mat(2 \times 2, \mathbb{C})$ , consideriamo

$$\mathbf{S}_2 \subset \mathbf{sp}(2, \mathbb{C}) := \{ M \in Mat(2 \times 2, \mathbb{C}) : tr(M) = 0 \}$$

definita dalle condizioni

$$M \in \mathbf{S}_2$$
 se  $tr(M) = 0$ ,  $\mathbf{E}M = -\overline{M}^T \mathbf{E}$ 

 $\mathfrak{S}_2$  è un'algebra di Lie rispetto al commutatore  $([\cdot, \cdot] : \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2 \Rightarrow \mathbb{R})$  tale che

$$[A,B] = AB - BA.$$

Dimostrazione. Per riuscire a vedere tale algebra, basta prendere una base per  $S_2$  formata dalle matrici di Pauli moltiplicate per l'unità complessa

$$i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
  $i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$   $i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ .

Si può facilmente verificare che

$$[\mathrm{i}\sigma_i,\mathrm{i}\sigma_j] = -\mathrm{i}\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k - \delta_{ij}\mathrm{I} + \mathrm{i}\,\varepsilon_{jik}\sigma_k + \delta_{ji}\mathrm{I} = -2\mathrm{i}\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

dove con  $\varepsilon_{ijk}$  si è utilizzato il tensore Levi-Civita. Dunque  $S_2$  è effettivamente un'algebra in quanto ogni suo elemento è scrivibile come combinazione lineare di tali matrici di Pauli.

Vogliamo considerare ora le matrici dipendenti dal tempo  $M(t) \in Mat(2 \times 2, \mathbb{C})$  che siano in  $\mathcal{A}_s$  come definito in 4.1.1 e in  $\mathfrak{S}_2$  per ogni t reale; tali matrici come vedremo sono parte della seguente Algebra di Lie:

Lemma 4.2.3. Consideriamo

$$\mathscr{S}_{2,s} = \{ M(t) \in \mathcal{A}_s : M(t) \in \mathfrak{S}_2 \ \forall \ t \ reale \ \}.$$

 $\mathcal{L}_{2,s}$  è un'algebra di Lie rispetto al commutatore tra matrici.

Dimostrazione. Viene direttamente dalla dimostrazione del lemma 4.2.2.

**Osservazione 4.2.4.** La matrice  $M(t) = i\lambda E + P(\lambda, t) \in \mathscr{L}_{2,s}$ , e dunque è possibile svilupparla in serie di Fourier

$$M(t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{M}(\ell) e^{\mathrm{i}(\ell \cdot \omega)t}$$

Data l'appartenenza all'algebra per ogni tempo per cui la matrice è definita, quando ci appelleremo a matrici in  $\mathscr{L}_{2,s}$  ometteremo la dipendenza dal tempo. Nel caso che prenderemo in esame, infatti, in realtà  $P(t) = P(\lambda, t)$ .

**Lemma 4.2.5.** Viene chiamato  $\mathscr{G}_{2,s}$  il gruppo delle matrici definite in tal modo

$$\mathscr{G}_{2,s} := \{ G(t) \in \mathcal{A}_s : G(t) = e^{\mathbf{S}(t)}, \quad dove \quad \mathbf{S}(t) \in \mathscr{S}_{2,s} \}$$

che risulta essere un sottogruppo di

$$\mathcal{G}_{2,s}^{\pm} := \left\{ G \in \mathcal{A}_s : \quad \det G = 1 \,, \quad G^{-1} \mathsf{E} = \mathsf{E} \,\overline{G}^T \right\}$$

il quale è composto da tutte le matrici  $G \in \mathcal{A}_s$  della forma

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

Dimostrazione. Per notare che  $\mathcal{G}_{2,s}$  è un gruppo basta utilizzare la formula di Baker–Campbell–Hausdorff.  $\Box$ 

Si nota come lo spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  dipendenti dal tempo, se munito della norma  $|\cdot|_s$  è uno spazio di Banach, e dunque:

- $\mathcal{S}_{2,s}$  essendo anch'esso uno spazio vettoriale contenuto nello spazio di Banach delle matrici  $2 \times 2$ , è di Banach.
- $G_{2,s}$  è un insieme contenuto nello spazio di Banach delle matrici $2\times 2$ ed è chiuso rispetto alla norma $|\cdot|_s$ .

#### 4.2.2 Cambiamenti di coordinate ed esponenziale di Lie

Per effettuare i cambi di coordinate che ci interessano è importante riportare dei risultati che useremo nel corso di tutta la trattazione. Il risultato fondamentale che utilizzeremo è quello di rendere il pullback di un campo vettoriale tramite l'esponenziale di Lie. Il modo in cui si arriva a questo risultato con tutte le dimostrazioni è riportato in maniera esaustiva nell'appendice B. Lemma 4.2.6. Data l'ODE

$$\dot{x} = V(x)$$
 con  $V \in C^{\infty}(U, \mathbb{R}^n)$  (4.2.1)

se si applica il cambio di variabili  $x = \Phi(\tau_0, y)$ , dove  $\Phi$  risolve

$$\begin{cases} \Phi_{\tau}(\tau, y) = f(\Phi(\tau, y)) \\ \Phi(0, y) = y \end{cases}$$

$$(4.2.2)$$

 $con f \in C^{\infty}(U, \mathbb{R}^n)$  e  $\tau_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  allora nel nuovo sistema di coordinate la dinamica sarà espressa da

$$\dot{y} := W(y) = e^{\tau_0 \cdot ad f(y)} V(y).$$

In questo modo l'equazione differenziale nelle nuove coordinate si potrà esprimere in maniera molto agevole e compatta.

Nel corso della tesi avremo a che fare con cambiamenti di coordinate dati da flussi di ODE che dipendono da campi vettoriali lineari. In tale caso è fondamentale utilizzare il seguente

Lemma 4.2.7. Consideriamo una ODE matriciale dipendente dal tempo scritta come:

$$\begin{cases} \dot{x} = M(t)x\\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$
(4.2.3)

Dove  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $M(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}, Mat(n \times n))$ . Applicando come cambiamento di coordinate dipendente dal tempo il flusso della seguente ODE:

$$\begin{cases} x_{\tau} = N(t)x, & con \ N(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}, Mat(n \times n)) \\ t_{\tau} = 0 \\ x(0) = y \\ t(0) = t \end{cases}$$

$$(4.2.4)$$

Dove tale flusso al tempo  $\tau_0$  verrà indicato come  $\Phi(\tau_0; y, t)$ , allora il nuovo sistema nelle coordinate y, risolverà la seguente ode:

$$\dot{y} = My, \quad dove \quad M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(adN)^k}{k!} M - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(adN)^{k-1}}{k!} \dot{N}.$$

Dove l'operatore adN rappresenta il commutatore tra le matrici ((adN)M = [M, N])

Dimostrazione. Partendo dall'ODE (4.2.3), si riscrive tale campo vettoriale come

$$f(x,t) = \sum_{h} M_{ih}(t) x_h \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Esprimo il campo vettoriale che determina la dinamica delle y come l'esponenziale di Lie del campo vettoriale

$$g(x,t) = \sum_{j} N_{kj}(t) x_j \ \frac{\partial}{\partial x_k}$$

ossia della corrispondente ODE 4.2.4

Per calcolare tale esponenziale di lie noto che:

$$\left[\sum_{h} M_{ih}(t) x_{h} \frac{\partial}{\partial x_{i}}, \sum_{j} N_{kj}(t) x_{j} \frac{\partial}{\partial x_{k}}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial t}, \sum_{j} N_{kj}(t) x_{j} \frac{\partial}{\partial x_{k}}\right] = \left[N(t), M(t)\right]x + \frac{\partial N(t)}{\partial t}x_{k}$$

dove si è usato fortemente il Lemma 5.2.12 presente nell'Appendice A. Si vuole capire qual è il risultato che si ottiene iterando questo procedimento, dunque si applica di nuovo il commutatore a quanto ottenuto nel passo precedente.

$$\begin{bmatrix}\sum_{h} [N(t), M(t)]_{ih}(t) \ x_{h} \ \frac{\partial}{\partial x_{i}}, \sum_{j} N_{kj}(t) \ x_{j} \ \frac{\partial}{\partial x_{k}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sum_{h} (\frac{\partial N(t)}{\partial t})_{ih} x_{h} \ \frac{\partial}{\partial x_{i}}, \sum_{j} N_{kj}(t) \ x_{j} \ \frac{\partial}{\partial x_{k}} \end{bmatrix} = \\ = [N(t), [N(t), M(t)]x + [N(t), \frac{\partial N(t)}{\partial t}]x.$$

Dunque se la serie di Lie converge totalmente itero questo conto infinite volte fino ad ottenere il pullback di f(x,t) che sarà dunque

$$\dot{y} = My, \quad dove \quad M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(adN)^k}{k!} M - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(adN)^{k-1}}{k!} \dot{N}.$$

Notiamo facilmente che questa serie di Lie converge totalmente rispetto alla norma  $|\cdot|_s$  utilizzando le varie proprietà elencate nel paragrafo 4.1.2:

$$|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(adN)^k}{k!} M|_s \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} |N|_s^k |M|_s$$

e quest'ultima serie converge totalmente (basta un qualsiasi criterio quali confronto o radice). Allo stesso modo

$$|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(adN)^{k-1}}{k!} \dot{N}|_{s_1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k!} |N|_{s_1}^{k-1}| \dot{N}|_{s_1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k!} C(s-s_1) |N|_s^k$$

converge totalmente, e dunque tale esponenziale di Lie è ben definito e totalmente convergente.  $\Box$ 

# 4.3 Riducibilità: caso non risonante

Dopo quanto detto nelle sezioni precedente, partiamo dall'equazione

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{i}\lambda\mathbf{E} + P(\lambda, t))\mathbf{w}$$

dove  $P(\lambda, t)$  si può espandere in Fourier come in 4.1.4, ed inoltre la taglia di tale matrice è piccola rispetto alla norma introdotta prima, ossia

$$|P|_s := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} e^{s|\ell|} \sqrt{|\widehat{a}(\lambda, \ell)|^2 + |\widehat{b}(\lambda, \ell)|^2} \ll 1,$$

o più semplicemente

$$P(\lambda, t) \in \mathscr{S}_{2,s}.$$

Dato che la dipendenza da  $\lambda$  non ci interessa nel corso della discussione, la ometteremo, perciò per indicare  $P(\lambda, t)$  useremo semplicemente P(t).

Senza perdita di generalità assumiamo che  $a(\lambda, t)$  sia a media nulla.

L'obiettivo principale di questa sezione è di dimostrare il seguente risultato:

**Teorema 4.3.1.** Data l'equazione differenziale definita in  $\mathbb{C}^2$  da

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{i}\lambda \mathbf{E} + P(\lambda, t)) \mathbf{w} \quad dove \quad P(\lambda, t) \in \mathscr{S}_{2,s}$$

$$(4.3.1)$$

e fissato  $\gamma > 0$  tale che

$$|(\omega \cdot \ell) \pm 2\lambda| \ge \gamma \quad e \quad \frac{|P|_s}{\gamma} \le \frac{1}{16},\tag{4.3.2}$$

allora esiste un cambiamento di coordinate definito da

$$G_{\infty}(t) = \lim_{n \to \infty} e^{\mathbf{s}_n(t)} \cdot e^{\mathbf{s}_{n-1}(t)} \cdot \dots \cdot e^{\mathbf{s}_1(t)} \cdot e^{\mathbf{s}_0(t)} \in \mathcal{G}_{2,s}$$

che coniuga il sistema 4.3.1 a

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathrm{i}\rho(\lambda)\mathbf{E}$$
 w

dove  $\rho(\lambda)$  è una funzione indipendente dal tempo e analitica in  $\lambda$ .

In questo modo abbiamo dimostrato che nelle zone definite da 4.3.2 siamo nello spettro continuo dell'operatore  $\mathscr{H}$  che abbiamo studiato.

Per dimostrare il teorema generiamo tale cambiamento di coordinate passo per passo annullando i vari ordini nella perturbazione. I vari passi saranno esposti in diversi lemmi in cui saranno fondamentali tutti gli strumenti che abbiamo imparato nei preliminari.

Ora abbiamo tutti gli strumenti necessari studiare i vari lemmi che descrivono i passi grazie al quale genereremo il cambiamento di coordinate cercato, ossia a dimostrare il teorema 4.3.1.

#### 4.3.1 Passo zero

Fisso

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{w} \quad e \quad P_0 = P \quad e \quad \rho_0(\lambda) = \lambda.$$

**Lemma 4.3.2.** Dato il sistema in  $\mathbb{C}^2$  descritto da

$$\dot{\mathbf{w}}_0 = (\mathbf{i}\rho_0(\lambda)\mathbf{E} + P_0(t))\mathbf{w}_0, \qquad P_0 \in \mathscr{S}_{2,s}$$

$$(4.3.3)$$

fissato  $\gamma := \gamma_0 > 0$  per cui vale 4.3.2, esiste un cambiamento di coordinate definito da  $G_0(t) = e^{\mathbf{s}_0(t)} \in \mathcal{G}_{2,s}$  che congiuga il sistema 4.3.3 a

$$\begin{split} \dot{\mathbf{w}}_1 &= (\mathrm{i}\rho_1(\lambda)\mathbf{E} + P_1)\mathbf{w}_1 \\ dove \quad P_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^k}{k!} P_0 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^{k-1}}{k!} P_0; \quad P_1 = O(P_0); \quad e \quad \rho_1(\lambda) = \lambda. \end{split}$$

Dimostrazione. Ricordando che  $P_0 \in \mathscr{S}_{2,s}$ , possiamo scrivere

$$P_0(t) = \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ \ell \neq 0}} \widehat{P}_0(\ell) e^{\mathrm{i}(\ell \cdot \omega) t}$$

e dedurre anche importanti proprietà degli elementi di matrice, ossia che

$$\widehat{P}_{0}(\ell) = i \begin{pmatrix} \widehat{P}_{0}^{++}(\ell) & \widehat{P}_{0}^{+-}(\ell) \\ \widehat{P}_{0}^{-+}(\ell) & \widehat{P}_{0}^{--}(\ell) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \widehat{a}_{0}(\ell) & \widehat{b}_{0}(\ell) \\ -\overline{b}_{0}(-\ell) & -\widehat{a}_{0}(\ell) \end{pmatrix}$$
(4.3.4)

dove  $a(t) = \sum_{\ell} \hat{a}_0(\ell) e^{i\ell t}$  è una funzione reale. Nel caso della matrice iniziale  $P_0$ , però, essa ha il termine di media nulla, ossia  $\hat{a}_0(0) = 0$ .

Quello che faremo, dunque, è cercare  $\mathbf{S}_0(t)$  vicino all'identità che mi generi il cambiamento di coordinate:

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = (\mathrm{i}\rho_1(\lambda)\mathbf{E} + P_1(t)) \xrightarrow{\mathbf{w}_1 = G_0(t)\mathbf{w}_0} \dot{\mathbf{w}}_0 = (\mathrm{i}\rho_0(\lambda)\mathbf{E} + P_0(t))\mathbf{w}_0.$$

La domanda che ci si pone è per quali  $\lambda$  posso fare tale cambiamento di coordinate. Nelle nuove variabili, come è stato già esposto nel Lemma 4.2.7, la dinamica sarà espressa da

$$\dot{\mathbf{w}}_{1} = \left[\sum_{k} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{0})^{k}}{k!} (i\rho_{0}\mathbf{E} + P_{0}) - \sum_{k} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{0})^{k-1}}{k!} (\dot{\mathbf{S}}_{0})\right] \mathbf{w}_{1} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{0})^{k}}{k!} (P_{0}) + i\rho_{0}(\lambda)\mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{0})^{k-1}}{k!} (i\rho_{0}(\lambda)[\mathbf{S}_{0},\mathbf{E}] - \dot{\mathbf{S}}_{0}) \right\} \mathbf{w}_{1}.$$

$$(4.3.5)$$

Dunque per il primo passo si vogliono cancellare tutti i pezzi non diagonali e della stessa taglia di  $P_0$ , e ricordando che  $P_0$  ha i termini di media  $\hat{a}(0)$  nulla per ipotesi, scriviamo quella che chiamiamo equazione omologica

$$P_0 + i\rho_0(\lambda)[\mathbf{S}_0, \mathbf{E}] - \dot{\mathbf{S}}_0 = 0.$$
(4.3.6)

Sviluppandola nello spazio di Fourier otteniamo

$$\widehat{P}_0(\ell) + i\rho_0(\lambda)[\widehat{S}_0(\ell), \mathbf{E}] - i(\omega \cdot \ell)\widehat{S}_0(\ell) = 0$$
(4.3.7)

e scrivendo l'equazione per ogni componente delle matrici otteniamo le condizioni

$$\begin{cases} i(\omega \cdot \ell) \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{++}(\ell) = \widehat{P}_{0}^{++}(\ell) \\ i(\omega \cdot \ell) \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{--}(\ell) = \widehat{P}_{0}^{--}(\ell) \\ i[(\omega \cdot \ell + 2\rho_{0}(\lambda))] \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{+-}(\ell) = \widehat{P}_{0}^{+-}(\ell) \\ i[(\omega \cdot \ell - 2\rho_{0}(\lambda))] \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{-+}(\ell) = \widehat{P}_{0}^{-+}(\ell) \end{cases}$$
(4.3.8)

Innanzitutto scegliamo  $\omega$  in modo tale che

$$|\gamma_0| \le \frac{\omega}{4}.$$

Per le prime due equazioni la condizione affinchè vengano risolte è che  $\ell \neq 0$ , ma tale condizione è già soddisfatta dato che abbiamo escluso il temine di media nell'espansione in Fourier del potenziale v. Le ultime due equazioni mi definiscono la *condizione di non risonanza*:

$$(\omega \cdot \ell) \pm 2\rho_0(\lambda) \neq 0.$$

Dato che vale la 4.3.2, in tali zone è risolta l'equazione omologica e

$$\widehat{\mathbf{S}}_{0}^{++}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{0}^{++}(\ell)}{i(\omega \cdot \ell)} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{--}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{0}^{--}(\ell)}{i(\omega \cdot \ell)} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{+-}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{0}^{+-}(\ell)}{i(\omega \cdot \ell + 2\rho_{0}(\lambda))} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{-+}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{0}^{-+}(\ell)}{i(\omega \cdot \ell - 2\rho_{0}(\lambda))}$$

Risulta fondamentale verificare che la matrice generatrice di questo cambiamento di coordinate sia effettivamente una matrice  $\in \mathscr{S}_{2,s}$ . Questo però si vede abbastanza facilmente, difatti per quello che abbiamo visto sopra, e ricordandoci la forma della matrice di partenza in 4.3.4, si ha che

$$\widehat{\mathbf{S}}_{0}(\ell) = \mathrm{i} \begin{pmatrix} \frac{\widehat{a}_{0}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} & \frac{\widehat{b}_{0}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell + 2\rho_{0}(\lambda))} \\ \frac{-\widehat{b}_{0}(-\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell - 2\rho_{0}(\lambda))} & \frac{-\widehat{a}_{0}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} \end{pmatrix}$$

Bisogna dunque verificare che i termini sulla diagonale

$$\widehat{A}_0(\ell) = \widehat{\mathbf{S}}_0^{++}(\ell) = \frac{\widehat{a}_0(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell)} = \widehat{\mathbf{S}}_0^{--}(\ell)$$

sono dei coefficienti di Fourier di una funzione reale, ma questo si vede studiando il complesso coniugato, che risulta essere

$$\overline{\widehat{A}_0}(\ell) = \frac{\overline{\widehat{a}_0}(\ell)}{-\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} = \frac{\widehat{a}_0(-\ell)}{-\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} = \widehat{A}_0(-\ell).$$

Perciò sulla diagonale vi effettivamente è una funzione reale. Per gli altri coefficienti, invece

$$\widehat{B}_0(\ell) = \widehat{\mathbf{S}}_0^{+-}(\ell) = \frac{\widehat{b}_0(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell + 2\rho_0(\lambda))}$$

si vede facilmente che

$$\widehat{\mathbf{S}}_0^{-+}(\ell) = -\overline{\widehat{B}_0}(-\ell) = \frac{-\widehat{b}_0(-\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell - 2\rho_0(\lambda))}$$

in modo da sod<br/>disfare la condizione di appartenenza a $\mathscr{S}_{2,s}~$  .

La taglia di  ${\tt S}_0$  sarà dunque

$$|\mathbf{S}_{0}|_{s} = \sum_{\ell} e^{s|\ell|} |\widehat{\mathbf{S}}_{0}(\ell)|_{HS} \le \sum_{\ell} e^{s|\ell|} \frac{|P_{0}(\ell)|_{HS}}{\gamma_{0}} \le \frac{|P_{0}|_{s}}{\gamma_{0}} := \delta_{0}.$$

Come vedremo in seguito, affinchè si possa iterare il nostro cambio di variabili ed esso sia ben definito, utilizzeremo la condizione

$$\frac{|P_0|_s}{\gamma_0} := \delta_0 < \frac{1}{16} \tag{4.3.9}$$

già espressa in 4.3.2. Sostituendo l'equazione 4.3.6 in 4.3.5 si trova:

$$\mathbf{w}_{1} = (\mathbf{i}\rho_{1}(\lambda)\mathbf{E} + P_{1})\mathbf{w}_{1} \quad dove \quad P_{1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{0})^{k}}{k!} P_{0} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{0})^{k-1}}{k!} P_{0} \quad e \quad \rho_{1}(\lambda) = \rho_{0}(\lambda) = \lambda.$$

Dove abbiamo fortemente usato il lemma 4.2.7. Notando come la taglia di  $P_1$  si può stimare come

$$|P_1|_s \le \sum_{k=1}^{\infty} (2|\mathbf{S}_0|_s)^k |P_0|_s + \sum_{k=2}^{\infty} (2|\mathbf{S}_0|_s)^{k-1} |P_0|_s \le \sum_k 2(\frac{2|P_0|_s}{\gamma_0})^k |P_0|_s.$$

E, usando la somma della serie geometrica, risulta essere

$$|P_1|_s \le 8 \frac{|P_0|_s^2}{\gamma_0} = 8 \ \delta_0^2 \ \gamma_0.$$

Dato che  $P_0\in\mathscr{S}_{2,s}$ , allora anche  $P_1\in\mathscr{S}_{2,s}$ , ossia è della forma

$$P_{1}(t) = i \begin{pmatrix} a_{1}(t) & b_{1}(t) \\ -\bar{b}_{1}(t) & -a_{1}(t) \end{pmatrix}$$
(4.3.10)

dove  $a_1(t) = \sum_{\ell} \hat{a_1}(\ell) e^{ilt}$  è una funzione reale, ma questa volta a media non nulla; ossia se scrivo la matrice dei coefficienti di Fourier

$$\widehat{P}_{1}(\ell) = i \begin{pmatrix} \widehat{a}_{1}(\ell) & \widehat{b}_{0}(\ell) \\ -\overline{\widetilde{b}_{0}}(-\ell) & -\widehat{a}_{0}(\ell) \end{pmatrix}$$

si ha che

$$\widehat{P}_1(0) = \mathbf{i} \begin{pmatrix} \widehat{a}_1(0) & 0\\ 0 & -\widehat{a}_1(0) \end{pmatrix}.$$

**Osservazione 4.3.3.** Sapendo che la quantità  $\delta_0 \ll 1$ , notiamo che, una volta fissata la taglia della perturbazione e dunque  $|P|_s$ , il valore di  $\gamma_0$  deve essere ben maggiore di  $4|P|_s$ . Si può inoltre notare come rendendo la perturbazione piccola, il sistema tende al sistema di particella libera in assenza di campo esterno, ed infatti il valore di  $\gamma$  diventa sempre più piccolo e i gap dello spettro tendono a sparire rendendo lo spettro continuo in tale limite.

#### 4.3.2 Primo passo

**Lemma 4.3.4.** Dato il sistema in  $\mathbb{C}^2$  descritto da

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = (\mathbf{i}\rho_1(\lambda)\mathbf{E} + P_1(t))\mathbf{w}_1, \qquad P_1 \in \mathscr{S}_{2,s}$$
(4.3.11)

fissato  $\gamma_1 > 0$  tale che

$$|(\omega \cdot \ell) \pm 2\rho_1(\lambda)| \ge \gamma_1 \quad e \quad \frac{|P_1|_s}{\gamma_1} \le \frac{1}{16},$$
(4.3.12)

dove  $\rho_1(\lambda) = \lambda$  allora esiste un cambiamento di coordinate definito da  $G_1(t) = e^{\mathbf{s}_1(t)} \in \mathcal{G}_{2,s}$  che congiuga il sistema 4.3.11 a

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = (\mathbf{i}\rho_2(\lambda)\mathbf{E} + P_2)\mathbf{w}_2$$
  
dove  $P_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_1)^k}{k!} P_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_1)^{k-1}}{k!} P_1; \quad P_2 = O(P_0^2); \quad e \quad \rho_2(\lambda) = \lambda + \hat{a}_1(0)$ 

dove ora  $\hat{a}_1(0)$  è il termine di media della matrice  $P_1(\lambda, t)$ .

Dimostrazione. La dinamica di partenza è

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = (\mathbf{i}\rho_1(\lambda)\mathbf{E} + P_1)\mathbf{w}_1. \tag{4.3.13}$$

Effettuiamo, come nel passo iniziale, il nostro cambio di variabili generato dalla matrice dipendente dal tempo

$$\mathbf{w}_2 = G_1(t)\mathbf{w}_1 = e^{\mathbf{S}_1(t)}\mathbf{w}_1.$$

Seguendo lo stesso schema del passo zero, otterrò:

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = \{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_1)^k}{k!} (\mathbf{i}\rho_1(\lambda)\mathbf{E} + P_1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_1)^{k-1}}{k!} (\dot{\mathbf{S}}_1) \} \mathbf{w}_2 = \\ \{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_1)^k}{k!} (P_1) + \mathbf{i}\rho_1(\lambda)\mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_1)^{k-1}}{k!} (\mathbf{i}\rho_1(\lambda)[\mathbf{S}_1, \mathbf{E}] - \dot{\mathbf{S}}_1) \} \mathbf{w}_2.$$

Ora, in questo caso vogliamo togliere tutti i termini di ordine  $|P_0|^2$ , ma i termini già diagonali che non vanno annullati non sono sono in  $\rho_1(\lambda)$ , ma presentano anche il termine diagonale di media non nulla di  $P_1$  come già chiaro in 4.3.10. Dunque si avrà la seguente **equazione omologica** in Fourier:

$$\widehat{P}_1(\ell) + \mathrm{i}\rho_1(\lambda)[\widehat{\mathbf{S}}_1(\ell), \mathbf{E}] - \mathrm{i}(\omega \cdot \ell)\widehat{\mathbf{S}}_1(\ell) = \mathrm{i}\begin{pmatrix}\widehat{P}_1^{++}(0) & 0\\ 0 & \widehat{P}_1^{--}(0)\end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}\widehat{a}_1(0) & 0\\ 0 & -\widehat{a}_1(0)\end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso tale equazione risulta essere pressochè uguale a quella del passo zero; perciò da 4.3.12 deduciamo che la matrice del generatore del cambiamento di coordinate  $S_1$  risulterà formata da tali componenti:

$$\widehat{\mathbf{S}}_{1}(\ell)^{++} = \frac{\widehat{P}_{1}^{++}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell)} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{1}^{--}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{1}^{--}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell)} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{1}^{+-}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{1}^{+-}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell + 2\rho_{1}(\lambda))} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{1}^{-+}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{1}^{-+}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell - 2\rho_{1}(\lambda))},$$

e dunque  $\mathbf{S}_1 \in \mathscr{S}_{2,s}$  identicamente a quanto detto per  $\mathbf{S}_0$ , inoltre avrà una taglia stimata da

$$|\mathbf{S}_1|_s = \sum_{\ell} e^{s|\ell|} |\mathbf{S}_1(\ell)|_{HS} \le \sum_{\ell} e^{s|\ell|} \frac{|P_1(\ell)|_{HS}}{\gamma_1} \le \frac{|P_1|_s}{\gamma_1} := \delta_1.$$

Dato che

$$\widehat{P}_1^{++}(0) = \widehat{a}_1(0) = -\widehat{P}_1^{--}(0),$$

definendo

$$\rho_2(\lambda) = \rho_1(\lambda) + \widehat{a}_1(0),$$

questo cambio di variabili, coniuga il sistema 4.3.16 a

$$\mathbf{w}_2 = [\mathrm{i}\rho_2(\lambda \mathbf{E} + P_2]\mathbf{w}_2$$

dove  $P_2 = O(P_0^3)$ . Possiamo inoltre fare qualche osservazione sulla taglia della matrice  $P_2$  sapendo che

$$P_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_1)^k}{k!} (P_1) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_1)^{k-1}}{k!} (P_1)$$

e seguendo gli stessi ragionamenti fatti per la taglia di  $P_1$ :

$$|P_2|_s \le 8 \frac{|P_1|_s^2}{\gamma_1} = 8 \ \delta_1^2 \ \gamma_1 \le 8^2 \frac{|P_0|_s^4}{\gamma_0^2}.$$

**Osservazione 4.3.5.** La condizione 4.3.12 deriva direttamente dalla 4.3.2 in quanto  $\rho_1(\lambda) = \lambda$  e perciò è sufficiente sciegliere  $\gamma_1 = \gamma_0 := \gamma$ . Proprio per questo motivo anche le condizioni di piccolezza per poter effettuare il cambio di variabili descritto in questo primo passo derivano direttamente da quelle imposte nel passo zero. Questo dettaglio è il motivo per cui basteranno le condizioni solo sulla dinamica iniziale per far convergere il procedimento.

#### 4.3.3 Secondo passo

**Lemma 4.3.6.** Dato il sistema in  $\mathbb{C}^2$  descritto da

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = (\mathbf{i}\rho_2(\lambda)\mathbf{E} + P_2(t))\mathbf{w}_2, \qquad P_2 \in \mathscr{S}_{2,s}$$
(4.3.14)

fissato  $\gamma_2 > 0$  tale che

$$|(\omega \cdot \ell) \pm 2\rho_2(\lambda)| \ge \gamma_2 \quad e \quad \frac{|P_2|_s}{\gamma_2} \le \frac{1}{16},$$
(4.3.15)

dove  $\rho_2(\lambda) = \lambda + \hat{a}_1(0)$  allora esiste un cambiamento di coordinate definito da  $G_2(t) = e^{\mathbf{s}_2(t)} \in \mathcal{G}_{2,s}$ che congiuga il sistema 4.3.14 a

$$\dot{\mathbf{w}}_3 = (\mathbf{i}\rho_3(\lambda)\mathbf{E} + P_3)\mathbf{w}_3$$
  
dove  $P_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_2)^k}{k!} P_2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_2)^{k-1}}{k!} P_2; \quad P_3 = O(P_0^3); \quad e \quad \rho_3(\lambda) = \lambda + \hat{a}_1(0) + \hat{a}_2(0)$ 

dove ora  $\hat{a}_2(\lambda, 0)$  è il termine di media della matrice  $P_2(\lambda, t)$ .

Dimostrazione. La dinamica di partenza ora è

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = (\mathbf{i}\rho_2(\lambda)\mathbf{E} + P_2)\mathbf{w}_2. \tag{4.3.16}$$

Effettuiamo, come nel passo iniziale, il nostro cambio di variabili generato dalla matrice dipendente dal tempo

$$\mathbf{w}_3 = G_2(t)\mathbf{w}_2 = e^{\mathbf{S}_2(t)}\mathbf{w}_2.$$

Seguendo lo stesso schema dei passi precedenti, otterrò:

$$\begin{split} \dot{\mathbf{w}}_3 &= \{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_2)^k}{k!} (\mathbf{i}\rho_2(\lambda)\mathbf{E} + P_2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_2)^{k-1}}{k!} (\dot{\mathbf{S}}_2) \} \mathbf{w}_3 = \\ \{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_2)^k}{k!} (P_2) + \mathbf{i}\rho_2(\lambda)\mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_2)^{k-1}}{k!} (\mathbf{i}\rho_2(\lambda)[\mathbf{S}_2, \mathbf{E}] - \dot{\mathbf{S}}_2) \} \mathbf{w}_3. \end{split}$$

Ora, però, la diagonale della matrice  $P_2$ , sebbene appartenga a  $\mathcal{L}_{2,s}$ , non ha più media nulla, ossia non è più vero che possiamo considerare  $\hat{a}_2(0) \neq 0$ . Questo ci porta a considerare, questa volta, una diversa **equazione omologica**, che sarà:

$$\widehat{P}_{2}(\ell) + i\rho_{2}(\lambda)[\widehat{S}_{2}(\ell), \mathbb{E}] - i(\omega \cdot \ell)\widehat{S}_{2}(\ell) = i\begin{pmatrix}\widehat{P}_{2}^{++}(0) & 0\\ 0 & \widehat{P}_{2}^{--}(0)\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}\widehat{a}_{2}(0) & 0\\ 0 & -\widehat{a}_{2}(0)\end{pmatrix}.$$
 (4.3.17)

Dunque il tal caso la condizione di non risonanza sarà diversa da quella del primo passo, poichè in generale il pezzo diagonale non sarà più composto dai soli  $\lambda$  associati alla matrice E, ma comprenderà

anche gli elementi diagonale della matrice  $P_1$  che, come sappiamo, sono costituiti da una funzione reale nei  $\lambda$  di taglia  $a(\lambda) \sim |P_1|_s$ , perciò la condizione di non risonanza implica 4.3.15.

Questo cambio di variabili, se ci mettiamo nel caso non risonante, coniuga il sistema 4.3.16 a

$$\mathbf{w}_3 = [\mathrm{i}
ho_3(\lambda)\mathbf{E} + P_3]\mathbf{w}_3$$

dove

$$\rho_3(\lambda) = \rho_2(\lambda) + \hat{a}_2(0)$$

Possiamo fare qualche osservazione sulla taglia della matrice  $P_2$  sapendo che in tal caso è risolta l'equazione 4.3.17, e dunque

$$P_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_2)^k}{k!} (P_2) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_2)^{k-1}}{k!} [P_2 + i \begin{pmatrix} \widehat{a}_2(0) & 0\\ 0 & -\widehat{a}_2(0) \end{pmatrix}],$$

e seguendo gli stessi ragionamenti fatti per la taglia di  $P_2$  si nota che

$$|P_2|_s \le 8 \frac{|P_2|_s^2}{\gamma_2} = 8 \ \delta_1^2 \ \gamma_1 \le 8^2 \frac{|P_0|_s^4}{\gamma_1}.$$

Ora è importante verificare che la matrice  $S_2\in \mathscr{S}_{2,s}$ , ma, come già fatto al passo zero, la forma della matrice risulta essere

$$\widehat{\mathbf{S}}_{2}(\ell) = \mathrm{i} \begin{pmatrix} \frac{\widehat{a}_{2}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} & \frac{\widehat{b}_{2}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell + 2\rho_{2}(\lambda))} \\ \frac{-\widehat{b}_{2}(-\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell - 2\rho_{2}(\lambda))} & \frac{-\widehat{a}_{2}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} \end{pmatrix}$$

ed effettivamente essa appartiene all'algebra come già mostrato al passo zero.

**Osservazione 4.3.7.** Notiamo inoltre che questa zona di non risonanza conterrà al suo interno la zona di non risonanza dei primi passi, difatti

$$|(\omega \cdot \ell) \pm 2\rho_2(\lambda)| \ge |(\omega \cdot \ell) - 2(\lambda)| - 2|\widehat{a}_1(0)| \ge \gamma_0 - \frac{|P|_s^2}{\gamma_0^2}\gamma_0 \ge \gamma_0(1 - \delta_0^2)$$

e perciò anche in questo caso la 4.3.15 deriva direttamente dalla 4.3.2 in quanto basta scegliere  $\gamma_2 = \frac{\gamma_0}{2}$  grazie alla condizione di piccolezza su  $\delta_0$ .

#### 4.3.4 Iterazione

Vediamo ora come iterare questo cambiamento di coordinate con un'induzione.

**Lemma 4.3.8.** Supponiamo che il cambiamento di coordinate visto nei primi tre passi sia stato effettuato fino all'ordine n-esimo, dunuque che la dinamica sia descritta da:

$$\dot{\mathbf{w}}_n = (\mathbf{i}\rho_n \mathbf{E} + P_n)\mathbf{w}_n \quad dove \quad P_n = O(P_{n+1}) \tag{4.3.18}$$

dove

1.  $\frac{|P_n|_s}{\gamma_n} := \delta_n \le \frac{1}{16},$ 2.  $|\omega \cdot \ell \pm 2\rho_n| \ge \gamma_n,$ 3.  $P_n \in \mathscr{S}_{2,s},$ 

allora esiste il cambiamento di coordinate  $G_n(t) = e^{\mathbf{S}_n(t)} \in \mathscr{G}_{2,s}$  che coniuga il sistema 4.3.18 a

$$\dot{\mathbf{w}}_{n+1} = (\mathbf{i}\rho_{n+1}\mathbf{E} + P_{n+1}(t)) \mathbf{w}_{n+1}$$
  
dove  $P_{n+1}(t) = O(P_0^{n+2}(t)) \quad e \quad \rho_{n+1} = \rho_n + \hat{a}_n(0)$ 

dove  $\hat{a}_n(0)$  è il termine di media della matrice  $P_n$ .

*Dimostrazione.* Dunque stiamo cercando, come già visto nei passi precedenti, la funzione  $S_n(t)$  che generi il cambio di coordinate

$$\dot{\mathbf{w}}_{n+1} = (\mathrm{i}\rho_{n+1}\mathbf{E} + P_{n+1}(t)) \mathbf{w}_{n+1} \xrightarrow{\mathbf{w}_{n+1} = G_n(t)\mathbf{w}_n = e^{\mathbf{s}_n(t)\mathbf{w}_n}} \dot{\mathbf{w}}_n = (\mathrm{i}\rho_n\mathbf{E} + P_n(t))\mathbf{w}_n.$$

Dato che  $P_n \in \mathscr{S}_{2,s}$ , questo implica che la forma di tale matrice sia

$$P_n(t) = i \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ -\overline{b_n}(t) & -a_n(t) \end{pmatrix} \quad dove \quad a_n(t) \in \mathbb{R}$$

in modo tale da soddisfare la condizione della traccia nulla <br/>e $\mathsf{E}P_n=-\overline{P_n}^T\mathsf{E}$ . Sviluppandola in serie di Fourier si ottiene, dunque, la matrice dei coefficienti

$$\widehat{P}_n(\ell) = i \begin{pmatrix} \widehat{a}_n(\ell) & \widehat{b}_n(\ell) \\ -\overline{\widehat{b}_n}(-\ell) & -\widehat{a}_n(\ell) \end{pmatrix}$$

Tale matrice, però, non ha il termine diagonale di media nulla, ossia se indichiamo con

$$[P_n] = \mathbf{i} \begin{pmatrix} \widehat{P}_n^{++}(0) & 0\\ 0 & \widehat{P}_n^{--}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{i} \widehat{a}_n(0) \mathbf{E},$$

allora l'equazione omologica che deve essere soddisfatta per eliminare tutti i pezzi di ordine n risulta essere

$$P_n + \mathrm{i}\rho_n[\mathsf{E},\mathsf{S}_n] - \dot{\mathsf{S}}_n = [P_n]. \tag{4.3.19}$$

Risolvendo tale equazione per <br/>per i coefficienti di Fourier di ogni elemento della matrice di<br/>  $S_n$  si ottiene, nel caso non risonante già espresso prima

$$\widehat{\mathbf{S}}_{n}^{++}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{n}^{++}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{n}^{--}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{n}^{--}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{n}^{+-}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{n}^{+-}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell + 2\rho_{n})} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{n}^{-+}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{n}^{-+}(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell - 2\rho_{n})}.$$

Osservazione 4.3.9. La matrice del cambiamento di variabili  $S_n \in \mathscr{S}_{2,s}$  .

Sviluppandola in Fourier la matrice dei coefficienti risulta essere

$$\widehat{\mathbf{S}}_n(\ell) = \mathrm{i} \begin{pmatrix} \frac{\widehat{a}_n(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} & \frac{\widehat{b}_n(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell + 2\rho_n)} \\ \frac{-\widehat{b}_n(-\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell - 2\rho_n)} & \frac{-\widehat{a}_n(\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell)} \end{pmatrix}$$

e si vede facilmente che essa appartiene all'algebra di Lie  $\mathscr{S}_{2,s}$  poichè i coefficienti sulla diagonale sono tali che

$$\overline{\widehat{C}_n}(\ell) = \frac{\widehat{a}_n(-\ell)}{-i(\omega \cdot \ell)} = \frac{\widehat{a}_n(-\ell)}{-i(\omega \cdot \ell)} = \widehat{C}_n(-\ell)$$

ossia sono coefficienti di una funzione reale, mentre per i coefficienti sull'antidiagonale vale che

$$\overline{\widehat{B}_n}(\ell) = \frac{\overline{\widehat{b}_n}(\ell)}{-\mathrm{i}(\omega \cdot \ell \pm 2\rho_n)} = -\frac{\overline{\widehat{b}_n}(-\ell)}{\mathrm{i}(\omega \cdot \ell \pm 2\rho_n)} = -\overline{\widehat{B}_n}(-\ell)$$

in modo da soddisfare le condizioni di tale struttura algebrica.

Viene allora effettuato il cambio di variabili che coniuga il sistema 4.3.18 a

$$\dot{\mathbf{w}}_{n+1} = (\mathbf{i}\rho_{n+1}\mathbf{E} + P_{n+1}(t)) \mathbf{w}_{n+1}$$

dove

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \widehat{a}_n(0)$$

e per quanto è stato detto in precedenza, la matrice  $P_{n+1}$  è espressa da

$$P_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_n)^k}{k!} (P_n) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_n)^{k-1}}{k!} (P_n + [P_n]).$$

Dato che  $S_n \in \mathscr{S}_{2,s}$  come suggerito dalla seconda osservazione, allora anche  $P_{n+1} \in \mathscr{S}_{2,s}$ . Osservazione 4.3.10. La taglia di  $P_{n+1}$  di può stimare nel seguente modo:

$$\begin{split} |P_{n+1}|_s &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (2|\mathbf{S}_n|_s)^k |P_n|_s + \sum_{k=2}^{\infty} (2|\mathbf{S}_n|_s)^{k-1} |P_n|_s \leq \sum_k 2(\frac{2|P_n|_s}{\gamma_n})^k |P_n|_s \leq \\ &\leq \frac{|P_n|_s^2}{\gamma_n}. \end{split}$$

**Osservazione 4.3.11.** Per una corretta scelta di  $\gamma_{n+1}$  è verificata la condizione per poter continuare ad applicare il passo iterativo, ossia vale che

$$\frac{|P_{n+1}|_s}{\gamma_{n+1}} := \delta_{n+1} \le \frac{1}{16}$$

Infatti, dalla condizione di non risonanza soddisfatta per l'n-esimo passo, ossia da

$$|(\omega \cdot \ell) - 2\rho_n| \ge \gamma_n$$

e sapendo che

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \widehat{a}_n(0)$$

possiamo notare che bisogna scegliere  $\gamma_{n+1}$  tale che

$$|(\omega \cdot \ell) \pm 2\rho_{n+1}| \ge |(\omega \cdot \ell) - 2\rho_n| - 2|\widehat{a_n}(0)| \ge \gamma_n - \frac{|P_n|_s^2}{\gamma_n^2}\gamma_n = \gamma_n(1 - \delta_n^2) \ge \gamma_{n+1}.$$

Dunque definisco

$$\frac{\delta_0}{2} \le \gamma_{n+1} \le \gamma_n (1 - \delta_n^2) \le \gamma_0 \tag{4.3.20}$$

in tal modo è verificata la condizione

$$\delta_{n+1} = \frac{|Pn+1|_s}{\gamma_{n+1}} \le 8 \frac{|P_n|_s^2}{\gamma_n \gamma_n + 1} = \frac{8\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \delta_n^2 \le \frac{1}{16}.$$

Dunque, date le ipotesi per cui è realizzabile l'n-esimo passo, abbiamo dimostrato come per delle corrette scelte dei parametri siamo in grado di effettuare anche l'(n+1)-esimo passo. Allora quello che vogliamo fare è una scelta dei parametri  $\gamma_n \in \delta_n$  in modo da riuscire a fare infiniti passi.

**Lemma 4.3.12.** Fissato  $\gamma_0$ , se sono rispettate le condizioni

$$|(\omega \cdot \ell) \pm 2\rho_0(\lambda)| \ge \gamma_0 \quad e \quad \frac{|P_0|_s}{\gamma_0} \le \frac{1}{16},$$
(4.3.21)

allora data la scelta dei parametri definita da

$$\gamma_n = \gamma_0 \left(1 - \sum_{j=1}^n 4^{-j}\right) \qquad e \qquad \delta_n \le \delta_0 \, e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

$$(4.3.22)$$

l'iterazione definita sui cambiamenti di coordinate converge per  $n \longrightarrow \infty$ , ossia posso definire

$$G_{\infty}(t) = \lim_{n \to \infty} e^{\mathbf{s}_n(t)} \cdot e^{\mathbf{s}_2(t)} \cdot \dots \cdot e^{\mathbf{s}_1(t)} \cdot e^{\mathbf{s}_0(t)} \quad \in \quad \mathscr{G}_{2,s} ,$$

che coniuga il sistema 4.3.3 a

$$\dot{\mathbf{w}}_{\infty} = (\mathbf{i}\rho_{\infty}\mathbf{E})\mathbf{w}_{\infty} \tag{4.3.23}$$

*Dimostrazione.* Verifico per induzione che tali scelte definite in 4.3.22 sono coerenti con i passi effettuati.

*Base di induzione.* Per il passo zero e il primo passo è banale verificre che la scelta sia corretta, difatti

$$\gamma_0 = \gamma_0 \quad e \quad \delta_0 \le \delta_0$$
  
$$\gamma_1 = \gamma_0 \ge \gamma_0 (1 - \frac{1}{4}) \quad e \quad \delta_1 \le |P_0|_s \delta_0 \le \delta_0 e^{-\frac{1}{2}}.$$

*Passo induttivo.* Ritendendo corretta la scelta per n, la dimostro per n + 1. Ricordandoci quanto detto in 4.3.20, per dimostrare il passo induttivo su  $\gamma_{n+1}$  basterà dimostrare che

$$\gamma_{n+1} = \gamma_0 (1 - \sum_{j=1}^{n+1} 4^{-j}) \le \gamma_0 (1 - \sum_{j=1}^n 4^{-j}) - \gamma_0 \delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^n + 1}$$

che risulta equivalente a dimostrare che

$$\delta_0 4e \sup_n 4^n e^{-(\frac{3}{2})^n} \le 1.$$

Questo sup diventa banalmente un massimo, e dunque è possibile risolvere il problema di massimizzazione trovando il risultato che cerchiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} 4^x e^{-(\frac{3}{2})^x} &= 4^x e^{-(\frac{3}{2})^x} [ln(4) - (\frac{3}{2})^x ln(\frac{3}{2})] = 0\\ x &= \log_{\frac{3}{2}} (\frac{ln(4)}{ln(3) - ln(2)}) \simeq 3,032\\ \sup_n 4^n e^{-(\frac{3}{2})^n} &= 4^3 e^{-(\frac{3}{2})^3} \simeq 2, 2 < 4. \end{aligned}$$

Questo mi assicura che la condizione su  $\delta_0$  affinchè possa applicare il cambiamento di coordinate è ben posta

$$\delta_0 \le \frac{1}{16 \, e} < \frac{1}{16}$$

Questo era quanto valeva per l'induzione su  $\gamma$ , vediamo ora sui  $\delta$ . Dando per corretta la stima su  $\delta_n$  in 4.3.22, la verifico per n+1, ma da quanto visto nella terza osservazione, basterà far vedere che:

$$\delta_{n+1} \le 8 \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \delta_n^2 \le 16 \, \delta_0^2 \, e^{-2(\frac{3}{2})^n + 2} \le \delta_0 \, e^{-(\frac{3}{2})^n + 1}$$

Dove è stata usata l'ipotesi induttiva su n. Per verificare tale disuguaglianza basterà far vedere che

$$16\,\delta_0\,e\sup_n\,e^{-\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^n} \le 1$$

In questo modo possiamo notare come la condizione posta all'inizio risulta corretta in quanto affinchè sia valida l'(n + 1)-esima stima su  $\delta$ , deve risultare vero che

$$\delta_0 \le \frac{1}{16 \, e} < \frac{1}{16}$$

Siamo arrivati, dunque, a generare il nostro cambiamento di coordinate all'ordine n in cui, però, i parametri che caratterizzano il nuovo sistema di coordinate convergono a un valore finito se consideriamo il limite per  $n \to \infty$ . Infatti

$$\{\gamma_n\} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{2}{3}\gamma_0 > \frac{1}{2}\gamma_0.$$

Questo vale anche per per la successione dei  $\rho_n$ , che, come vedremo, converge nel limite considerato. Infatti, ricordando che  $\rho_{n+1} = \rho_n + \widehat{a_n(0)}$ , si ha che

$$|\rho_{n+1} - \rho_n| \le \gamma_n \delta_n \le \gamma_0 \delta_0 2^{-n},$$

e allora se considero il limite per la serie, basta notare che

$$\sum_{k=1}^{n} |\rho_{k+1} - \rho_k| \le \sum_{k=1}^{n} \delta_0 2^{-k}$$

per dimostrare che tale somma è convergente nel limite in cui  $n \to \infty$ , e perciò anche la successione dei  $\rho_n$  converge.

Dunque il cambiamento di coordinate iterato per  $n \to \infty$  coniuga il sistema studiato a un sistema in cui la taglia della matrice che rappresenta la perturbazione tende a zero, e dunque il sistema converge al sistema descritto da 4.3.23

Affinchè tale procedimento sia ben definito, a questo punto, resta da verificare la convergenza della successione di cambiamenti di coordinate, ossia che

$$G_n(t) = e^{\mathbf{S}_n(t)} \cdot \dots \cdot e^{\mathbf{S}_1(t)} \cdot e^{\mathbf{S}_0(t)} \quad dove \quad \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n \in \mathscr{S}_{2,s} ,$$

sia una successione convergente nel proprio spazio di Banach. Per dimostrare questo basta che tale successione sia di Cauchy rispetto alla norma  $|\cdot|_s$ , ossia che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m, n \ge N, \quad |G_n - G_m|_s < \varepsilon$$

Ma per vedere questo dimostriamo, come fatto per la successione dei  $\rho_n$ , che vale la relazione

$$|G_n - G_m|_s \le \delta_0 2^{-n}$$

Prendendo m = n + 1, noto che

$$G_{n+1} - G_n = (e^{\mathbf{S}_n} - \mathbf{I})G_n$$

e che

$$|G_{n+1} - G_n|_s = |e^{\mathbf{S}_n} - \mathbf{I}|_s |G_n|_s.$$

E dunque mi basta dimostrare per induzione che

$$|G_n|_s \le \sum_{j=0}^n 2^{-j}.$$

L'induzione non è difficile perchè, supponendo vero per n, so che

$$|e^{\mathbf{S}} - \mathbf{I}|_s \le |\mathbf{S}|_s$$

e dunque

$$|G_{n+1} - G_n|_s \le 4\delta_0 |\mathbf{S}_n|_s \le 4\delta_0^2 e^{-(\frac{3}{2})^n} \le \delta_0 2^{-n}.$$

Siamo dunque arrivati a costruire il nostro cambiamento di coordinate convergente tale che

$$\dot{\mathbf{w}}_{\infty} = \mathrm{i}\rho_{\infty}\mathbf{E} \ \mathbf{w}_{\infty} \overset{\mathbf{w}_{\infty} = G_0(t) \cdot G_1(t) \cdot \ldots \cdot G_{\infty}(t) \mathbf{w}_0}{\leadsto} \ \dot{\mathbf{w}}_0 = (\mathrm{i}\rho_0(\lambda)\mathbf{E} + P_0(t))\mathbf{w}_0.$$

Dunque, nelle zone di non risonanza, la soluzione al problema 1.1.3 è una funzione periodica, poichè il cambiamento di coordinate effettuato dipende da matrici periodiche. Infatti, se chiamo u le coordinate iniziali del sistema 1.1.3, allora

$$\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} = BG(\omega t) \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\rho_{\infty}t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\rho_{\infty}t} \end{pmatrix} G^{-1}(\omega t) B^{-1} \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \end{pmatrix}$$

e, dato che  $G \in \mathscr{G}_{2,s}$ , è periodica di periodo pari a quello del potenziale in 1.1.3.

Seguendo tutti i lemmi che sono stati esposti, si arriva a dimostrare il Teorema 4.3.1, dunque le zone di non risonanza appartengono allo spettro assolutamente continuo dell'operatore.

Ragioniamo bene sulla condizione di non risonanza.

$$|\omega \cdot \ell - 2\lambda| \ge \gamma$$

con la condizione

$$\frac{|P|_s}{\gamma} \leq \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{|V|}{\lambda\gamma} \leq \frac{1}{16}.$$

Dunque una corretta scelta di  $\gamma$  può essere

$$\gamma = \frac{16 \left| V \right|}{\lambda}$$

e dunque gli estremi della zona di risonanza risultano essere tali che

$$\lambda = \frac{\omega \cdot \ell}{2} \pm \frac{8 |V|}{\lambda} = \alpha \pm \frac{8 |V|}{\lambda},$$

ossia che se descriviamo l'andamento della variabile $\lambda$ in funzione della taglia della perturbazione, per un certo $\ell$ fissato, otteniamo

$$\lambda = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 \pm 32|V|}}{2}$$

Ma la soluzione  $\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 \pm 32|V|}}{2}$  è una soluzione molto vicina a  $\lambda = 0$  se pensiamo alle condizioni di piccolezza sulla taglia della perturbazione, perciò consideriamo solo la soluzione

$$\lambda = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 \pm 32|V|}}{2}.$$



Figura 4.1: Andamento dei valori di  $\lambda$  in funzione di della taglia della parturbazione |V|: bande energetiche.

# 4.4 Riducibilità: caso risonante

L'obiettivo che abbiamo è quello di applicare lo stesso argomento iterativo utilizzato nel caso non risonante, estendendolo al caso risonante.

Iniziamo a studiare le zone di risonanza, ossia quelle zone che, fissato  $\gamma$ , rispettano la seguente condizione

$$|\omega \cdot \ell \pm 2\lambda| \le \gamma$$

Il primo risultanto importante riguardo queste zone è il seguente:

Lemma 4.4.1. Le zone di risonanza sono disgiunte, ossia se chiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\ell_0} &= \{\lambda \in \mathbb{R} \quad t.c. \quad |\omega \cdot \ell_0 \pm 2\lambda| \le \gamma \} \\ \mathbf{R}_{\ell_1} &= \{\lambda \in \mathbb{R} \quad t.c. \quad |\omega \cdot \ell_1 \pm 2\lambda| \le \gamma \} \end{aligned}$$

con  $\ell_0, \ell_1 \in \mathbb{Z}$ , allora vale che

$$\mathbf{R}_{\ell_0} \cap \mathbf{R}_{\ell_1} = \emptyset \quad \forall \quad \ell_0, \ell_1 \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. Si vede banalmente scegliendo

$$|\gamma| \leq \frac{|\omega|}{4}$$

e si verifica subito che per un qualsiasi  $\ell' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , vale che

$$|\omega \cdot \ell' \pm 2\lambda| = |\omega \cdot (\ell' - \ell_0) + (\omega \cdot \ell_0) \pm 2\lambda| \ge |\omega| - \gamma \ge 3\gamma.$$

La prima zona di risonanza presa in esame è quella intorno a $\ell_0=0,$ tale zona verrà identificata da

$$\mathbf{R}_0 = \{ \lambda \in \mathbb{R} \quad t.c. \quad |\omega \cdot 0 \pm 2\lambda| \le \gamma \}$$

ed è dunque la zona contraddistinta dalla condizione

$$-\frac{\gamma}{2} \le \lambda \le \frac{\gamma}{2}.\tag{4.4.1}$$

Anche in questa regione non vi possono essere altre zone risonanti, poichè, per  $\ell_0 \neq 0 \in \mathbb{Z}$ 

$$|\omega \cdot \ell_0 \pm 2\lambda| > \omega - 2\frac{\gamma}{2} > 4\gamma - \gamma = 3\gamma.$$

Il risultato importante che denota questa zona è il seguente

**Teorema 4.4.2.** Data l'equazione differenziale definita in  $\mathbb{C}^2$  da

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{i}\lambda\mathbf{E} + P(\lambda, t))\mathbf{w} \quad dove \quad P(\lambda, t) \in \mathscr{S}_{2,s}$$

$$(4.4.2)$$

allora se fissiamo  $\gamma$  tale che  $\lambda \in \mathbf{R}_0$  e  $\frac{|P|_s}{\gamma} \leq \frac{1}{16}$ , esiste un cambiamento di coordinate

$$G_{\infty}(t) = \lim_{n \to \infty} e^{\mathbf{S}_n(t)} \cdot e^{\mathbf{S}_{n-1}(t)} \cdot \dots \cdot e^{\mathbf{S}_1(t)} \cdot e^{\mathbf{S}_0(t)} \quad \in \quad \mathcal{G}_{2,s}$$

che coniuga il sistema iniziale a

$$\dot{\mathbf{w}}_{\infty} = K_{\infty} \mathbf{w}_{\infty} \quad dove \quad K_{\infty} = \mathrm{i}\lambda \mathbf{E} + \sum_{j\geq 0} \widehat{P}_j(0).$$
 (4.4.3)

Come nel caso non risonante, la dimostrazione viene riportata utilizzando i vari passi iterativi.

#### 4.4.1 Passo zero in $R_0$

Nel passo zero la dinamica di partenza è

$$\dot{\mathbf{w}}_0 = (\mathrm{i}\lambda \mathbf{E} + P_0(t))\mathbf{w}_0$$

dove  $P_0 = P \in \mathscr{S}_{2,s}$  come già scritto del caso precedente. Quando cerco la funzione  $S_0$  generatrice del cambiamento di coordinate, nel caso non risonante scrivevo la seguente equazione omologica:

$$P_0 + \mathrm{i}\lambda[\mathsf{S}_0,\mathsf{E}] - \dot{\mathsf{S}}_0 = 0.$$

Tale equazione, però, bisogna studiarla in  $\mathbf{R}_0$ . Nella seguente regione si pone il problema di riuscire a risolverla per  $\ell_0 = 0$ . In effetti,nella regione vicina a  $\ell = 0$ , non è possibile stimare la quantità  $|\omega \cdot \ell \pm 2\lambda|$  in maniera uniforme. Dunque, non posso giungere al risultato ottenuto in 4.3.8. A questo punto, non potendo risolvere l'equazione omologica in  $\mathbf{R}_0$ , impongo che la matrice sia nulla per  $\ell_0 = 0$ , ossia che

$$\widehat{\mathbf{S}}_{0}^{++}(\ell) = \begin{cases} \frac{\widehat{P}_{0}^{++}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega\cdot\ell)} & \text{se } \ell \neq 0\\ 0 & \text{se } \ell = 0 \end{cases} \quad \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{--}(\ell) = \begin{cases} \frac{\widehat{P}_{0}^{--}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega\cdot\ell)} & \text{se } \ell \neq 0\\ 0 & \text{se } \ell = 0 \end{cases}$$
$$\widehat{\mathbf{S}}_{0}^{+-}(\ell) = \begin{cases} \frac{\widehat{P}_{0}^{+-}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega\cdot\ell+2\lambda)} & \text{se } \ell \neq 0\\ 0 & \text{se } \ell = 0 \end{cases} \quad \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{-+}(\ell) = \begin{cases} \frac{\widehat{P}_{0}^{-+}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega\cdot\ell-2\lambda)} & \text{se } \ell \neq 0\\ 0 & \text{se } \ell = 0 \end{cases}$$

In tal modo, come già visto nel caso non risonante, dato che  $P_0 \in \mathscr{S}_{2,s}$ , allora  $\mathbf{S}_0 \in \mathscr{S}_{2,s}$ . Dunque nell'equazione omologica non è possibile annulare tutti i pezzi per  $\ell = 0$ , ossia essa, espansa nello spazio di Fourier risulta essere

$$\widehat{P}_0(\ell) + i\lambda[\widehat{S}_0(\ell), \mathbf{E}] - i(\omega \cdot \ell)\widehat{S}_0(\ell) = \widehat{P}_0(0).$$
(4.4.4)

Per comodità chiamiamo

$$[P_0] = P_0(0) = i \begin{pmatrix} \hat{a}_0(0) & \hat{b}_0(0) \\ -\hat{b}_0(0) & \hat{a}_0(0) \end{pmatrix}.$$

poichè  $P_0 \in \mathscr{L}_{2,s}$ . Come si può notare, benchè le equazioni siano differenti da quelle del caso non risonante, le notazioni sono pressochè le stesse poichè si vuole sottolineare la somiglianza del procedimento iterativo.

A questo punto scriviamo l'equazione per trovare la matrice  $P_1 \in \mathscr{S}_{2,s}$  che descrive la dinamica nel nuovo sistema di coordinate, come già fatto nel caso non risonante:

$$\begin{split} \dot{\mathbf{w}}_1 &= \{\sum_{k\geq 0} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^k}{k!} (\mathbf{i}\lambda \mathbf{E} + P_0) - \sum_{k\geq 1} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^{k-1}}{k!} \dot{\mathbf{S}}_0 \} \mathbf{w}_1 = \\ &= \{\mathbf{i}\lambda \mathbf{E} + \sum_{k\geq 0} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^k}{k!} P_0 + \sum_{k\geq 1} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^{k-1}}{k!} ([\mathbf{S}_0, \mathbf{E}] - \dot{\mathbf{S}}_0) \} \mathbf{w}_1. \end{split}$$

Se è risolta la 4.4.4, allora tale relazione si scrive come

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \{\mathbf{i}\lambda \mathbf{E} + \sum_{k\geq 1} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^k}{k!} P_0 + \sum_{k\geq 2} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^{k-1}}{k!} (-P_0 + [P_0])\} \mathbf{w}_1 = (P_1 + K_1) \mathbf{w}_1$$

dove

$$P_1 = \sum_{k \ge 1} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^k}{k!} P_0 - \sum_{k \ge 2} \frac{(ad \ \mathbf{S}_0)^{k-1}}{k!} P_0 \quad \in \mathscr{S}_{2,s}$$
$$K_1 = i\lambda \mathbf{E} + [P_0] \quad \in \mathscr{S}_{2,s}.$$

Ora, in questo passo zero la matrice S si ricava facilmente, e la forma della matrice  $K_1$  è molto semplice, ma consideriamo ora, ad esemplo, il primo passo.

#### 4.4.2 Primo Passo

In tale passo la dinamica di partenza è:

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = (P_1 + K_1)\mathbf{w}_1;$$

cerco la matrice  $\mathtt{S}_1\in\mathscr{S}_{2,s}$  che coniughi tale sistema a

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = (P_2 + K_2)\mathbf{w}_2. \tag{4.4.5}$$

I ragionamenti sono gli stessi del passo zero, dunque si avrà la seguente equazione omologica

$$\widehat{P}_1(\ell) + i\lambda[\widehat{S}_1(\ell), K_1] - i(\omega \cdot \ell)\widehat{S}_1(\ell) = [\widehat{P}_1].$$

Per scriverla in maniera più compatta, la esprimiamo come

$$P_1 + i\lambda[\mathbf{S}_1, K_1] - \dot{\mathbf{S}}_1 = [P_1]. \tag{4.4.6}$$

Ora cerchiamo la forma della matrice del cambiamento di base  $S_1$ , per vedere se essa appartiene all'algebra  $\mathscr{S}_{2,s}$ . Supponiamo di risolvere l'equazione 4.4.6, e di trovare la matrice  $S_1 \in \mathscr{S}_{2,s}$ . Tale risultato verrà discusso in seguito.

Se è possibile trovare la matrice  $S_1$ , allora applichiamo gli stessi ragionamenti utilizzati nel caso risonante; dunque è possibile studiare la dinamica nelle nuove coordinate ed essa sarà espressa da 4.4.5, dove

$$P_2 = \sum_{k \ge 1} \frac{(ad \mathbf{S}_1)^k}{k!} P_1 - \sum_{k \ge 2} \frac{(ad \mathbf{S}_1)^{k-1}}{k!} P_1 \quad \in \mathscr{S}_{2,s}$$
$$K_2 = i\lambda \mathbf{E} + [P_1] + [P_0] \quad \in \mathscr{S}_{2,s}.$$

#### 4.4.3 Iterazione

Si vuole iterare il procedimento nello stesso modo del caso non risonante. Come già detto in precedenza, per sottolineare la somiglianza dei procedimenti, utilizzeremo la medesima notazione del caso non risonante seppur le equazioni studiate siano spesso diverse.

Ci aspettiamo che iterando questa procedura al passo n-esimo, otterremo una dinamica

$$\dot{\mathbf{w}}_n = (P_n + K_n)\mathbf{w}_n$$

dove

$$K_n = i\lambda E + [P_0] + [P_1] + \dots + [P_n]$$

Questo poichè, come già visto nei passi precedenti, abbiamo risolto l'equazione

$$\widehat{P}_n(\ell) + i\lambda[\widehat{S}_n(\ell), K_n] - i(\omega \cdot \ell)\widehat{S}_n(\ell) = [P_n]$$

trovando una soluzione per  $S_n \in \mathscr{S}_{2,s}$ . Tale risultato va discusso con attenzione.

**Lemma 4.4.3.** Siano  $\gamma \geq 0$   $e -\frac{\gamma}{2} \leq \lambda \leq \frac{\gamma}{2}$ . Se chiamo

$$K_n = \begin{pmatrix} i(\lambda + A_n) & iB_n \\ -i\overline{B}_n & -i(\lambda + A_n) \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_{2,s}$$

dove  $A_n \ e \ B_n$  rappresentano gli elementi di matrice della somma  $[P_0] + [P_1] + \dots$  corrispondenti al termine  $\ell = 0$  dei coefficienti di Fourier  $P_i(\ell)$  per i = 0, 1..., ossia

$$A_n = \hat{a}_0(0) + \hat{a}_1(0) + \dots + \hat{a}_n(0) \in \mathbb{R} \quad e \quad B_n = \hat{b}_0(0) + \hat{b}_1(0) + \dots + \hat{b}_n(0)$$

ed essi sono tali che  $|A_n|, |B_n| \leq \frac{\gamma}{8}$ , allora se fisso  $\ell \neq 0$  e considero l'equazione

$$P_n(t) + i\lambda[\mathbf{S}_n(t), K_n] - \dot{\mathbf{S}}_n(t) = [P_n(t)]$$
(4.4.7)

 $allora \ \forall P_n(t) \in \mathscr{S}_{2,s} \ esiste \ una \ soluzione \ \mathbf{S}_n(t) \in \mathscr{S}_{2,s} \ tale \ che \ |\mathbf{S}_n(t)|_s \leq \frac{c|P_n(t)|_s}{\gamma}.$ 

Dimostrazione. Passo nello spazio di fourier, dove l'equazione 4.4.7 diventa, per $\ell \neq 0$ 

$$\mathbf{i}(\omega \cdot \ell)\widehat{\mathbf{S}}_n(\ell) - \mathbf{i}\lambda[\widehat{\mathbf{S}}_n(\ell), K_n] = \widehat{P}_n(\ell)$$

Ora,  $S_n(\ell) \in P_n(\ell) \in Mat(2 \times 2, \mathbb{C})$ , allora scrivo la matrice rappresentativa dell'operatore

$$\mathbf{T}: M \in Mat(2 \times 2, \mathbb{C}) \to \mathbf{i}(\omega \cdot \ell)M + [K_n, M]$$

nella base canonica identificata da

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$   $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Tale matrice risulta essere

$$\mathbf{T}_{e_j} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}(\omega \cdot \ell) & \mathbf{i}\bar{B}_n & \mathbf{i}B_n & 0\\ -\mathbf{i}B_n & \mathbf{i}[(\omega \cdot \ell) + 2(\lambda + A_n)] & 0 & \mathbf{i}B_n\\ -\mathbf{i}\bar{B}_n & 0 & \mathbf{i}[(\omega \cdot \ell) - 2(\lambda + A_n)] & \mathbf{i}\bar{B}_n\\ 0 & -\mathbf{i}\bar{B}_n & -\mathbf{i}B_n & \mathbf{i}(\omega \cdot \ell) \end{pmatrix}.$$

Noto che

$$d = \det(\mathbf{T}_{e_j}) = \omega^2 \ell^2 [\omega^2 \ell^2 - 4(\lambda + A_n)^2 - 4|B_n|^2]$$

e dunque è possibile invertire tale matrice

$$\mathbf{T}_{e_{1}}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \mathrm{i}(-4A_{n}^{2} - 8A_{n}\lambda + 2|B_{n}| + \omega^{2}\ell^{2} - 4\lambda^{2}) \\ \mathrm{i}B_{n}(-2A_{n} + \omega\ell - 2\lambda) \\ \mathrm{i}\bar{B}_{n}(2A_{n} + \omega\ell + 2\lambda) \\ 2\mathrm{i}|B_{n}| \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_{e_{2}}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\bar{B}_{n}(2A_{n} - \omega\ell + 2\lambda) \\ -\mathrm{i}(2A_{n}\omega\ell - 2|B_{n}| - \omega^{2}\ell^{2} + 2\omega\ell\lambda) \\ -2\mathrm{i}\bar{B}_{n}^{-2} \\ \mathrm{i}\bar{B}_{n}(-2A_{n} + \omega\ell - 2\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{e_3}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} iB_n(-2A_n - \omega\ell - 2\lambda) \\ 2iB_n^2 \\ i(2A_n\omega\ell + 2|B_n| + \omega^2\ell + 2\omega\ell\lambda) \\ iB_n(2A_n + \omega\ell + 2\lambda) \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_{e_4}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} 2i|B_n| \\ iB_n(2A_n - \omega\ell + 2\lambda) \\ i\overline{B}_n(-2A_n - \omega\ell - 2\lambda) \\ i(-4A_n^2 - 8A_n\lambda + 2|B_n| + \omega^2\ell^2 - 4\lambda^2) \end{pmatrix}.$$

Per trovare la matrice del cambiamento di base  $S_n$  cercata, basterà applicare tale operatore a  $\widehat{P}_n(\ell)$ , che nella base canonica si esprime come

$$\widehat{P}_n(\ell) = \begin{pmatrix} \widehat{a}_n(\ell) \\ \underline{\widehat{b}_n(\ell)} \\ -\overline{\widehat{b}_n(-\ell)} \\ -\widehat{a}_n(\ell) \end{pmatrix}.$$

Applico  $\mathbf{T}_{e_j}^{-1}$  a tale vettore e ottengo  $\mathbf{T}^{-1}[\widehat{P}_n(\ell)]$  in componenti di  $e_1, e_2, e_3, e_4$ :

$$\widehat{\mathbf{S}}_{n}(\ell) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\widehat{a}_{n}(\ell)(-4A_{n}^{2}-8A_{n}\lambda+\omega^{2}\ell^{2}-4\lambda^{2}) + \mathrm{i}\widehat{b}_{n}(\ell)\overline{B}_{n}(2A_{n}-\omega\ell+2\lambda) + \mathrm{i}\overline{\widehat{b}_{n}}(-\ell)B_{n}(2A_{n}+\omega\ell+2\lambda) \\ \mathrm{i}\widehat{a}_{n}(\ell)B_{n}(-4A_{n}+2\omega\ell-4\lambda) - \mathrm{i}\widehat{b}_{n}(\ell)(2A_{n}\omega\ell-2|B_{n}|-\omega^{2}\ell^{2}+2\omega\ell\lambda) - 2\mathrm{i}\overline{\widehat{b}_{n}}(-\ell)B_{n}^{2} \\ \mathrm{i}\widehat{a}_{n}(\ell)\overline{B}_{n}(4A_{n}+2\omega\ell+4\lambda) - 2\mathrm{i}\widehat{b}_{n}(\ell)\overline{B}_{n}^{2} - \mathrm{i}\overline{\widehat{b}_{n}}(-\ell)(2A_{n}\omega\ell+2|B_{n}|+\omega^{2}\ell+2\omega\ell\lambda) \\ -\mathrm{i}\widehat{a}_{n}(\ell)(-4A_{n}^{2}-8A_{n}\lambda+\omega^{2}\ell^{2}-4\lambda^{2}) - \mathrm{i}\widehat{b}_{n}(\ell)\overline{B}_{n}(2A_{n}-\omega\ell+2\lambda) - \mathrm{i}\overline{\widehat{b}_{n}}(-\ell)B_{n}(2A_{n}+\omega\ell+2\lambda) \end{pmatrix}$$

dunque si può verificare facilmente che

$$\widehat{\mathbf{S}}_n^{++}(\ell) + \widehat{\mathbf{S}}_n^{--}(\ell) = 0, \quad \overline{\widehat{\mathbf{S}}_n^{++}}(\ell) = \widehat{\mathbf{S}}_n^{++}(-\ell) \quad e \quad \widehat{\mathbf{S}}_n^{-+}(\ell) = -\overline{\widehat{\mathbf{S}}_n^{+-}}(-\ell)$$

ossia,  $\mathbf{S}_n(t) \in \mathscr{G}_{2,s}$ . Per la stima della taglia basta stimare ogni elemtento di tale matrice, ricordandosi che

$$|A_n|, |B_n| \leq \frac{\gamma}{8}, \quad |\gamma| \leq \frac{\omega \ell}{4} \quad \mathrm{e} \quad |\widehat{a}_n|, |\widehat{b}_n| \leq C|P|_{HS}$$

Usando tali disuguaglianze, si arriva facilmente a vedere che

$$|\mathbf{S}_n|_{HS} \le \frac{c|P|_{HS}}{\gamma}$$

e dunque  $|\mathbf{S}_n(t)|_s \leq \frac{c|P_n(t)|_s}{\gamma}$ .

Una volta risolto tale problema, notiamo che dalla scelta fatta per la taglia della perturbazione in modo di far convergere il cambiamento di coordinate, si ha che

$$\frac{|P_n|_s}{\gamma} \le \delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^n + 1}$$

dove  $\delta_0 \leq \frac{1}{16}$  e dunque i vari pezzi di media nulla diventano sempre più piccoli e convergono uniformemente. Perciò nel limite per  $n \to \infty$  la dinamica sarà descritta da

$$\dot{\mathbf{w}}_{\infty} = K_{\infty} \mathbf{w}_{\infty} \quad \text{dove} \quad K_{\infty} = i\lambda \mathbf{E} + \sum_{j\geq 0} P_j(0)$$
(4.4.8)

ricordandoci sempre che siamo in un intorno di  $\ell_0 = 0$ , ossia nella condizione definita da 4.4.1.

**Osservazione 4.4.4.** Se  $|\lambda| \ge 4\delta_0 \gamma$  allora  $\sum_{j\ge 0} \widehat{P}_j(0)$  è una perturbazione di  $\lambda E$  dato che siamo nella condizione 4.4.1.

Studiamo ora la dinamica 4.4.8. Se la matrice  $K_{\infty}$  ha autovalori immaginari puri, allora la soluzione è nello spettro continuo, ossia è una soluzione periodica che è combinazone lineare di due funzioni che oscillano con lo stesso periodo. Se invece gli autovalori di tale matrice hanno parte reale non nulla, allora tale soluzione esploderà e non farà parte dello spettro continuo. Studiamo allora il caso generale.

Se chiamiamo

$$A_{\infty} = \hat{a}_0(0) + \hat{a}_1(0) + \hat{a}_2(0) + \dots$$

е

$$B_{\infty} = \hat{b}_0(0) + \hat{b}_1(0) + \hat{b}_2(0) + \dots$$

allora

$$K_{\infty} = \begin{pmatrix} i\lambda & 0\\ 0 & -i\lambda \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} A_{\infty} & B_{\infty}\\ -\overline{B}_{\infty} & -A_{\infty} \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_{2,s}$$

ed è possibile calcolare gli autovalori dall'equazione

$$\rho^2 = (\lambda + A_{\infty})^2 - |B_{\infty}|^2.$$
(4.4.9)

in questo modo si vede chiaramente che se  $B_{\infty} = 0$ , ossia se la matrice ha autovalori immaginari puri, allora  $K_{\infty}$  è diagonale come nel caso non risonante, e dunque abbiamo le soluzioni periodiche.

#### 4.4.4 Punti di bordo

Una volta studiato cosa succede nella regione  $\mathbf{R}_0$ , bisogna studiare cosa accade nei punti di bordo di tale zona. Le considerazioni fatte per  $\mathbf{R}_0$  ovviamente continuano a valere, vediamo però se la dinamica in tali punti farà parte dello sprettro continuo o no. Dato che conosciamo l'equazione 4.4.9, sappiamo che i punti di bordo sono i punti tali che

$$\lambda = -A_{\infty} \pm |B_{\infty}|.$$

Quando  $\lambda$  assume tali valori, come sappiamo, la matrice  $K_{\infty}$  ha autovalori nulli, ossia se effettuo i cambiamenti di coordinate periodici descritti sopra, la dinamica è descritta dall'ode

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \mathbf{w} \quad dove \quad c \in \mathbb{R}$$

e dunque otteniamo la prima variabile che resta costante nel tempo, mentre la seconda che cresce linearmente. Queste soluzioni, se riportate nel sistema di coordinate iniziale, diventano una soluzione che oscilla in maniera periodica e l'altra che oscilla mentre la sua ampiezza cresce linearmente verso  $+\infty$ . Dunque, abbiamo gli autovalori del caso con condizioni periodiche e antiperiodiche, come ci aspettavamo dalla teoria di Bloch-Floquet, ossia in tali casi siamo sempre nello spettro continuo.

#### 4.4.5 Nelle generiche zone risonanti $R_{\ell_0}$

Nella sezione precedente abbiamo visto cosa succede nella prima zona risonante attorno a  $\ell_0 = 0$ , vediamo ora cosa accade nelle altre zone generiche. Dunque fissiamo  $\omega, \gamma \in \mathbb{R}_+$  con la condizione che  $\gamma \leq \frac{|\omega|}{4}$ , e fissiamo  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $\lambda \in \mathbf{R}_{\ell_0}$  ossia che

$$\exists \ \ell_0 \in \mathbb{Z} : |\omega \cdot \ell_0 \pm 2\lambda| \le \gamma.$$

Abbiamo già visto nel lemma 4.4.1 come tali insiemi siano disgiunti. Il modo per vedere cosa accade alla dinamica in queste zone è quello di effettuare un cambio di coordinate grazie al quale possiamo riapplicare il procedimento iterativo del caso in  $\mathbf{R}_0$ .

Lemma 4.4.5. Consideriamo il sistema

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{i}\lambda\mathbf{E} + P(t))\mathbf{w} \tag{4.4.10}$$

dove però, questa volta, fissiamo  $\gamma$  tale che  $\lambda \in \mathbf{R}_{\ell_0}$ , e vale la condizione

$$\frac{|P|_s}{\gamma} \le \frac{1}{16}$$

Allora il cambiamento di coordinate definito da

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\ell_0\omega t} & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\ell_0\omega t} \end{pmatrix} \mathbf{w}'$$
(4.4.11)

coniuga il sistema 4.4.10 con il sistema

$$\mathbf{w}' = (\mathbf{i}\lambda'\mathbf{E} + P'(t))\mathbf{w}' \tag{4.4.12}$$

in cui però  $\lambda' \in \mathbf{R}_0$  e valgono tutte le ipotesi per applicare il procedimento iterativo e arrivare a una dinamica descritta da

$$\mathtt{w}_\infty' = K_\infty' \mathtt{w}_\infty'$$

Dimostrazione. Questo risultato viene banalmente dalla derivazione rispetto al tempo di 4.4.11

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{i}\lambda\mathbf{E} + P(t)) \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{i}\ell_0\omega t} & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{2}\mathbf{i}\ell_0\omega t} \end{pmatrix} \mathbf{w}' = \frac{1}{2}\mathbf{i}\ell_0\omega \begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{2}\mathbf{i}\ell_0\omega t} & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{2}\mathbf{i}\ell_0\omega t} \end{pmatrix} \mathbf{w}' + \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{i}\ell_0\omega t} & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{2}\mathbf{i}\ell_0\omega t} \end{pmatrix} \mathbf{w}'$$

esplicitando per  $\mathtt{w}'$ e ricordando che le matrici diagonali commutano, otteniamo

$$\dot{\mathbf{w}}' = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\lambda \mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\ell_0\omega\mathbf{E} + \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\ell_0\omega t} & 0\\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\ell_0\omega t} \end{pmatrix} P(t) \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\ell_0\omega t} & 0\\ 0 & e^{+\frac{1}{2}\mathrm{i}\ell_0\omega t} \end{pmatrix} ]\mathbf{w}'$$

che possiamo riscrivere dunque come

$$\mathbf{w}' = (\mathbf{i}\lambda'\mathbf{E} + P'(t))\mathbf{w}' \quad \text{dove} \quad \lambda' = \lambda + \ell_0 \frac{\omega}{2}.$$

In tal caso la condizione diventa

$$|\omega \cdot \ell' + 2(\lambda + \ell_0 \frac{\omega}{2})| = |\omega \cdot (\ell' + \ell_0) + 2\lambda| > \gamma \quad \text{se} \quad \ell' \neq 0.$$

Quello che dobbiamo verificare ora è che sia possibile applicare il procedimento iterativo del caso risonante vicino a zero.

Per fare questo notiamo che

$$P'(t) = i \begin{pmatrix} a(t) & b(t)e^{i\ell_0\omega t} \\ -\overline{b}(t)e^{-i\ell_0\omega t} & -a(t) \end{pmatrix}$$
(4.4.13)

allora per applicare il procedimento iterativo abbiamo bisogno della condizione di piccolezza sulla taglia della perturbazione. Tale condizione nella nuova dinamica si traduce in

$$\frac{|P'(t)|_{s_1}}{\gamma} < \frac{1}{16}$$

Ma, dalla forma della matrice 4.4.13

$$|P'(t)|_{s_1} \le e^{|\ell_0|s_1} |P(t)|_{s_1}$$

e dunque ci basta restringere il raggio di analiticità prendendo  $s_1 = \frac{1}{|\ell_0|}$  per poter applicare quanto fatto nel caso in  $\mathbf{R}_0$ , con la condizione più restrittiva che

$$|P|_{s_1} \le \frac{1}{16 \ e}.$$

Ora, applicando il nostro procedimento iterativo, coniughiamo il nostro sistema 4.4.12 con

$$\dot{\mathbf{w}}_{\infty} = K_{\infty} \mathbf{w}_{\infty} \tag{4.4.14}$$

dove

$$K_{\infty} = \mathrm{i}\lambda' \mathsf{E} + \sum_{j \ge 0} \widehat{P'}_j(0)$$

e valgono le stesse considerazioni fatte nella sezione precedente.

#### 4.4.6 Composizione velocità angolari

Abbiamo visto che nel caso non risonante abbiamo coniugato il sistema 4.4.2 a

$$\dot{\mathtt{w}}_{\infty}=\mathrm{i}
ho_{\infty}\mathtt{E}\ \mathtt{w}_{\infty}$$

dove  $\rho_{\infty}$  è una funzione analitica degli autovalori  $\lambda$ 

$$\rho_{\infty} = \rho_{\infty}(\lambda)$$

mentre nel caso in cui studiamo una zona risonante, il sistema lo coniughiamo a

$$\dot{\mathbf{w}}_{\infty} = K_{\infty} \mathbf{w}_{\infty}.$$

Nelle zone in cui gli autovalori della matrice  $K_{\infty}$  sono immaginari puri, la soluzione sarà comunque oscillante e dunque diagonale come nel caso non risonante. Dunque ci saranno delle zone in cui le soluzioni oscillanti derivanti da due diversi cambiamenti di coordinate si sovrappongono. Che relazione lega le due frequenza di oscillazioni dei due sistemi, e dunque le loro velocità angolari?

#### Lemma 4.4.6. Sia

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{i}\lambda\mathbf{E} + P(t)) \mathbf{w} \tag{4.4.15}$$

un'ODE in  $\mathbb{C}^2$  con  $P(t) \in \mathscr{S}_{2,s}$  periodica di periodo  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Supponiamo che esistano due cambiamenti di coordinate diversi  $G_1(\omega t), G_2(\omega t) \in \mathscr{G}_{2,s}$  che coniugano 4.4.15 con i due diversi sistemi

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{i}\lambda \mathbf{E} + P(t)) \mathbf{w} \xrightarrow{\mathbf{w} = G_1(\omega t)\mathbf{w}_1} \dot{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{i}\rho_1 \mathbf{E}\mathbf{w}_1$$
$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{i}\lambda \mathbf{E} + P(t)) \mathbf{w} \xrightarrow{\mathbf{w} = G_2(\omega t)\mathbf{w}_2} \dot{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{i}\rho_2 \mathbf{E}\mathbf{w}_2.$$

Allora esisteranno  $\ell_0, \ell_1 \in \mathbb{Z}$  tali che

$$\rho_1 - \rho_2 = \omega \ell_0 \quad e/o \quad \rho_1 + \rho_2 = \omega \ell_1$$

Dimostrazione. Dati i cambiamenti di coordinate scritti sopra, vale che

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \mathrm{i}\rho_1 \mathrm{E} \mathbf{w}_1 \overset{\mathbf{w}_1 = G(\omega t)\mathbf{w}_2 = G_1^{-1}(\omega t)G_2(\omega t)\mathbf{w}_2}{\leadsto} \quad \dot{\mathbf{w}}_2 = \mathrm{i}\rho_2 \mathrm{E} \mathbf{w}_2.$$

Usando le regole di coniugazione, allora, imposto l'equazione

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = -G^{-1}\dot{G}\mathbf{w}_2 + G^{-1}(\mathrm{i}\rho_1\mathbf{E})G\mathbf{w}_2 = \mathrm{i}\rho_2 E.$$

Moltiplicando ambo i lati per la matrice G si ottiene

$$-\dot{G}$$
w<sub>2</sub> + i $ho_1$ E $G$ w<sub>2</sub> - i $ho_2$  $G$ E = 0

e sviluppando tale equazione nello spazio di Fourier si ha

$$\omega \ell G(\ell) - \rho_1 \mathbf{E} G(\ell) + \rho_2 G(\ell) \mathbf{E} = 0.$$

Se scriviamo tale equazioni per elementi di matrice si ottiene

$$G^{++}(\ell)[\omega\ell + \rho_2 - \rho_1] = 0$$
  

$$G^{--}(\ell)[\omega\ell - \rho_2 + \rho_1] = 0$$
  

$$G^{+-}(\ell)[\omega\ell - \rho_2 - \rho_1] = 0$$
  

$$G^{-+}(\ell)[\omega\ell + \rho_2 + \rho_1] = 0.$$

Ora bisogna ricordarsi che la matrice  $G \in \mathscr{G}_{2,s}$ , e dunque non è possibile annullare tutti i termini di matrice, perciò esisteranno  $\ell_0, \ell_1 \in \mathbb{Z}$  tali che

$$\rho_1 - \rho_2 = \omega \ell_0 \quad e/o \quad \rho_1 + \rho_2 = \omega \ell_1;$$

se la matrice non presenta entrambi i termini diagonali o non presenta entrambi i termini antidiagonali, vale una delle due relazioni, mentre se essa ha tutti i termini valgono contemporaneamente entrambe le uguaglianze.  $\hfill \Box$ 

# Capitolo 5

# Caso quasi periodico

# 5.1 Preliminari

Vogliamo studiare in maniera perturbativa l'equazione di Schrödinger

$$u_{xx} + v(x)u = -\lambda^2 u, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
(5.1.1)

nel caso in cui il potenzale sia quasi periodico. Vediamo prima cosa si intende per una fuzione quasi-periodica.

**Definizione 5.1.1** (FUNZIONE QUASI PERIODICA). Una funzione  $v(x) : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$  è quasi-periodica di frequenza  $\omega \in \mathbb{R}^d$  se

- le componenti  $\omega_i$  sono razionalmente indipendenti, ossia il rapporto  $\frac{\omega_i}{\omega_j} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall i \neq j;$
- esiste una funzione  $\mathcal{V}: \mathbb{T}^d \Rightarrow \mathbb{R} \ 2\pi$ -periodica in ciascun angolo  $\varphi_1, ..., \varphi_d$  tale che

$$v(x) = \mathcal{V}(\omega_1 x, \dots, \omega_d x).$$

Considerando lo sviluppo in serie di Fourier di  $\mathcal{V}$ , si ottiene

$$\mathcal{V}(\varphi_1, \dots \varphi_d) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{V}(\ell) e^{i(\ell \cdot \varphi)} \quad \text{dunque} \quad v(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} v(\ell) e^{i(\ell \cdot \omega)x}$$

**Definizione 5.1.2.** Diremo che v(x) è analitica con raggio s se

$$|v(x)|_s := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} |v(\ell)| e^{s|\ell|} < \infty$$

Ora, applicando il cambio di coordinate già visto nel caso periodico (4.1.2 e 4.1.3), coniughiamo il sistema che risolve 5.1.1 con un'ODE matriciale descritta da

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{i}\lambda\mathbf{E} + P(\lambda, t))\mathbf{w}$$

dove abbiamo chiamato la variabile spaziale x come  $t \in P(\lambda, t) : \mathbb{R}^2 \Rightarrow Mat(2 \times 2, \mathbb{C}) \in \mathbb{S}_2$  è una funzione analitica e quasi-periodica nel tempo che si può espandere in serie di Fourier come

$$P(\lambda, t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} P(\lambda, \ell) e^{i(\ell \cdot \omega)t}$$

Per motivi che saranno chiari in seguito, per la trattazione quasi periodica sceglieremo come vettori di frequenze  $\omega$  dei vettori che soddisfano una specifica condizione detta *condizione diofantea*.

**Definizione 5.1.3** (CONDIZIONE DIOFANTEA). Si definisce vettore diofanteo il generico vettore  $\omega \in \mathbb{R}^d$  che verifica la condizione

$$|\omega \cdot \ell| \ge \frac{2\gamma_0}{|\ell|^{\tau_0}} \quad \forall \ \ell \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$$
(5.1.2)

con  $\gamma_0$  sufficientemente piccolo e  $\tau_0 \in \mathbb{R}_+$  fissati.

**Teorema 5.1.4.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^d$ , allora fissato  $\tau_0 > d - 1$ , l'insieme dei vettori diofantei (ossia che soddisfano la 5.1.2) per qualche  $\gamma_0 > 0$ , ha misura di Lebesgue relativa piena in  $\Omega$ .

E' possibile trovare una dimostrazione esaustiva di tale teorema in [6].

#### 5.1.1 Struttura algebrica e norma

Per la trattazione del caso quasi-periodico è comodo usare una norma che controlli anche la derivata in  $\lambda$  della matrice, perciò:

**Definizione 5.1.5** (NORMA). Dotiamo l'Algebra di Lie delle matrici quasi-periodiche di una norma che, dato un insieme  $\mathcal{I}$  unione di intervalli, è definita da

$$|P(\lambda,t)|_{s}^{\gamma,\mathcal{I}} := \sup_{\lambda \in \mathcal{I}} |P(\lambda,\cdot)|_{s} + \gamma \sup_{\lambda \in \mathcal{I}} |\frac{d}{d\lambda} P(\lambda,\cdot)|_{s}$$

dove  $|\cdot|_s$  è la norma definita in 4.1.1.

Denotiano con  $\mathcal{A}_{s}^{\gamma,\mathcal{I}}$  le matrici  $A \in Mat(2 \times 2, \mathbb{C})$  quasi-periodiche di frequenza  $\omega \in \mathbb{R}^{d}$  ed analitiche negli angoli di raggio s e  $\mathcal{C}^{1}$  in  $\lambda$  su un'unione finita di intervalli  $\mathcal{I}$  tali che  $|A|_{s}^{\gamma,\mathcal{I}} < \infty$ .

**Proposizione 5.1.6.** Date  $A(\lambda, t)$ ,  $B(\lambda, t) : \mathbb{R}^2 \Rightarrow Mat(2 \times 2)$  funzioni analitiche e quasi-periodiche nel tempo, tale norma gode delle seguenti proprietà:

- $|A(\lambda,t) \ B(\lambda,t)|_s^{\gamma,\mathcal{I}} \le |A(\lambda,t)|_s^{\gamma,\mathcal{I}} \ |B(\lambda,t)|_s^{\gamma,\mathcal{I}}.$
- Le code dell'espansione in serie di Fourier della funzione  $A(\lambda, t)$  definite da

$$A_{>N_0}(\lambda,t) = \sum_{|\ell|>N_0} \widehat{A}(\lambda,\ell) e^{\mathrm{i}(\ell \cdot \omega)t}$$

soddisfano

$$|A_{>N_0}|_{s'}^{\gamma,\mathcal{I}} \le e^{-(s-s')N_0} |A_{>N_0}|_s^{\gamma,\mathcal{I}} \quad \forall \ s' \le s$$

Dimostrazione. Innanzitutto dimostriamo la prima proprietà, essa deriva banalmente da

$$|AB|_{s}^{\gamma,\mathcal{I}} = \sup_{\lambda \in \mathcal{I}} |AB|_{s} + \gamma \sup_{\lambda \in \mathcal{I}} |\frac{d}{d\lambda}(AB)|_{s}.$$

Se ci ricordiamo che

$$\gamma \sup_{\mathcal{I}} |\frac{d}{d\lambda} (AB)|_s \le \gamma \sup_{\mathcal{I}} [|(\frac{dA}{d\lambda})B|_s + |A(\frac{dB}{d\lambda})|_s] \le \gamma \sup_{\mathcal{I}} |(\frac{dA}{d\lambda})|_s \sup_{\mathcal{I}} |B|_s + \gamma \sup_{\mathcal{I}} |(\frac{dB}{d\lambda})|_s \sup_{\mathcal{I}} |A|_s$$

allora abbiamo che

$$\begin{split} |AB|_{s}^{\gamma,\mathcal{I}} &\leq \sup_{\mathcal{I}} |A|_{s} \sup_{\mathcal{I}} |B|_{s} + \gamma \sup_{\mathcal{I}} |(\frac{dA}{d\lambda})|_{s} \sup_{\mathcal{I}} |B|_{s} + \gamma \sup_{\mathcal{I}} |(\frac{dB}{d\lambda})|_{s} \sup_{\mathcal{I}} |A|_{s} + \\ &+ \gamma^{2} \sup_{\mathcal{I}} |(\frac{dA}{d\lambda})|_{s} \sup_{\mathcal{I}} |(\frac{dB}{d\lambda})|_{s} - \gamma^{2} \sup_{\mathcal{I}} |(\frac{dA}{d\lambda})|_{s} \sup_{\mathcal{I}} |(\frac{dB}{d\lambda})|_{s} \end{split}$$

da cui finalmente otteniamo

$$|AB|_{s}^{\gamma,\mathcal{I}} \leq (\sup_{\lambda \in \mathcal{I}} |A|_{s} + \gamma \sup_{\lambda \in \mathcal{I}} |\frac{dA}{d\lambda}|_{s}) (\sup_{\lambda \in \mathcal{I}} |B|_{s} + \gamma \sup_{\lambda \in \mathcal{I}} |\frac{dB}{d\lambda}|_{s}) = |A|_{s}^{\gamma,\mathcal{I}} |B|_{s}^{\gamma,\mathcal{I}}$$

Per quanto riguarda la seconda proprietà possiamo notare che

$$|A_{>N_0}|_{s'} \leq \sup_{|\ell|>N_0} e^{-(s-s')|\ell|} \sum_{|\ell|>N_0} e^{s|\ell|} \sqrt{|\widehat{A}(\lambda,\ell)|_{HS}^2} = e^{-(s-s')N_0} |A_{>N_0}|_s \quad \forall \ s' \leq s.$$

Per la stima sulla norma della derivata il ragionamento è pressoché lo stesso, basta accorgersi che la derivata in  $\lambda$  cade solo sulla matrice dei coefficienti di Fourier, e quindi, allo stesso modo

$$|\frac{d}{d\lambda}A_{>N_0}|_{s'} \le e^{-(s-s')N_0}|\frac{d}{d\lambda}A_{>N_0}|_s \quad \forall \ s' \le s.$$

Una volta viste queste due stime, è banale verificare che

$$|A_{>N_0}|_{s'}^{\gamma,\mathcal{I}} \le e^{-(s-s')N_0} (\sup_{\mathcal{I}} |A_{>N_0}|_s + \gamma \sup_{\mathcal{I}} |\frac{d}{d\lambda} A_{>N_0}|_s) = e^{-(s-s')N_0} |A_{>N_0}|_s^{\gamma,\mathcal{I}}$$

**Lemma 5.1.7.** La matrice  $M(\lambda, t) = i\lambda \mathbf{E} + P(\lambda, t)$  appartiene all'algebra di Lie delle matrici quasi periodiche dipendenti dal tempo definita come segue

$$\mathscr{S}_{2,\mathfrak{z},\gamma,\mathcal{I}} = \{ M(\lambda,t) \in \mathcal{A}_{s}^{\gamma,\mathcal{I}} \text{ tale che } M(\lambda,t) \in \mathfrak{S}_{2} \forall t \text{ per cui } e \text{ definita} \}.$$

E allo stesso modo definiamo il gruppo delle matrici  $\mathcal{G}_{2,3,\gamma,\mathcal{I}}$  come nel lemma 4.2.5, con il corrispettivo cambiamento di norma.

Dimostrazione. La dimostrazione deriva banalmente dall'appartenenza di  $M(\lambda, t)$  all'algebra di Lie  $S_2$ .

**Osservazione 5.1.8.** Se  $M(\lambda, t) \in \mathscr{S}_{2,\lambda,\gamma,\mathcal{I}}$  allora è possibile scrivere la matrice in serie di Fourier come

$$M(\lambda, t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} M(\lambda, \ell) e^{i(\ell \cdot \omega)t},$$

ed ovviamente  $|M(\lambda,t)|_s^{\gamma,\mathcal{I}} \ll 1.$ 

D'ora in avanti ometteremo nel pedice i termini  $\gamma, \mathcal{I}$ , cosicchè l'algebra e il gruppo saranno chiamate come nel caso periodico, bisogna però ricordarsi che la norma su cui lavoriamo ora è differente, inoltre, omettermo, come nel caso periodico, la dipendenza da  $\lambda$  nelle matrici per semplicità di notazione.

Vediamo ora un teorema che sarà molto importante per capire la struttura dei gaps in questo caso.

**Teorema 5.1.9.** Sia  $\mathcal{I}_0$  un intervallo possibilmente illimitato e sia  $\rho(\lambda)$  una funzione  $\mathcal{C}^1(\mathcal{I}_0,\mathbb{R})$  tale che  $|\rho'(\lambda)| > \frac{1}{2} \ \forall \lambda \in \mathcal{I}_0$ . Dato  $\ell_0 \in \mathbb{Z}^d$ , sia

$$\mathbf{R}_{\ell_0}(\alpha) = \{ \lambda \in \mathcal{I}_0 \quad t.c. \quad |\omega \cdot \ell_0 \pm 2\rho_0(\lambda)| \le \alpha \}$$

allora, se  $\alpha \ll 1$  valgono i seguenti risultati:

- 1.  $\mathbf{R}_{\ell_0}(\alpha)$  è un intervallo limitato,
- 2.  $|\mathbf{R}_{\ell_0}(\alpha)| \leq 2\alpha$ .

Dimostrazione. Dalla stima sulla derivata risulta evidente che la funzione è iniettiva nell'intero intervallo  $\mathcal{I}_0$ . Inoltre, dal teorema della funzione inversa, sappiamo che  $\rho^{-1}(\lambda)$  non solo è continua ma è addirittura  $\mathcal{C}^1$  nel dominio di definizione. Da queste considerazioni, la funzione inversa mappa intervalli in intervalli, perciò vale 1.

Per stimare la misura di tale intervallo, introduco la funzione caratteristica dell'intervallo  $\mathbf{R}_{\ell_0}(\alpha)$ 

$$\chi(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda \notin \mathbf{R}_{\ell_0}(\alpha) \\ 1 & \text{se} \quad \lambda \in \mathbf{R}_{\ell_0}(\alpha) \end{cases}$$

A questo punto calcoliamo la misura dell'insieme come:

$$|\mathbf{R}_{\ell_0}(\alpha)| = misura \ (\mathbf{R}_{\ell_0}(\alpha)) = \int \chi(\lambda) d\lambda = \int_{\frac{(\omega \cdot \ell) - \alpha}{2}}^{\frac{(\omega \cdot \ell) + \alpha}{2}} \frac{dy}{\rho'(\lambda)} \le 2\alpha$$

dove è stata effettuata la sostituzione  $y = \rho(\lambda)$ .

**Osservazione 5.1.10.** Se la funzione  $\rho$  è globalmente iniettiva, il teorema si applica identicamente nel caso in cui l'insieme di definizione  $\mathcal{I}_0$  sia un'unione finita di intervalli.

## 5.2 Cambio di coordinate: caso non risonante

Teorema 5.2.1. Sia

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{i}\rho_0(\lambda)\mathbf{E} + P_0(\lambda, t)) \mathbf{w}$$
(5.2.1)

con  $P_0(\lambda, t)$  quasi-periodica in  $\mathscr{S}_{2,s}$  di periodo  $\frac{2\pi}{\omega}$  con  $\omega \in \mathbb{R}^d$   $2\gamma_0, \tau_0$ -diofanteo, un'equazione differenziale definita in  $\mathbb{C}^2$ , dove  $\rho_0(\lambda)$  è una funzione analitica che soddisfa

$$|\rho_0(\lambda)| \le 2|\lambda| \quad e \quad |\frac{d}{d\lambda}\rho_0(\lambda)| \ge \frac{1}{2} \quad \forall \ \lambda \in (0, +\infty).$$

Allora è possibile fissare  $\tau \geq \tau_0$  in modo che  $\forall \gamma \leq \gamma_0$  esistono  $N_0$  sufficientemente grande ed un insieme  $\mathcal{I} \subset [\gamma, +\infty) := \mathcal{I}_0$  di misura positiva tale che se per un certo  $s_0 \leq s$ 

$$\frac{|P|_{s_0}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma_0} N_0^{\tau_0} := \delta_0 N_0^{\tau_0} \le \frac{1}{16}$$

allora per ogni  $\lambda \in \mathcal{I}$  esiste un cambiamento di coordinate  $G(t) \in \mathcal{G}_{2,s_0}$  che coniuga il sistema 5.2.1 a

$$\dot{\mathtt{w}}=\mathrm{i}
ho_{\infty}(\lambda)\mathtt{E}$$
 i

dove  $\rho_{\infty}(\lambda)$  è una funzione indipendente dal tempo definita per ogni  $\lambda \in \mathcal{I}_0$  e  $\mathcal{C}^1$  in  $\lambda$ .

Dimostrando questo teorema abbiamo dimostrato che un insieme di misura positiva di  $\lambda$  appartiene allo spettro continuo dell'operatore quasi-periodico.

Come ormai siamo abituati a fare, dimostriamo questo risultato compiendo i vari passi iterativi.

#### 5.2.1 Passo zero

Consideriamo  $\lambda \in \mathcal{I}_0 := [\gamma, \infty).$ 

**Lemma 5.2.2.** Data l'equazione differenziale definita in  $\mathbb{C}^2$  da

$$\dot{\mathbf{w}}_0 = (i\rho_0(\lambda) + P_0(\omega t))\mathbf{w}_0 \quad con \quad P_0(\omega t) \in \mathscr{S}_{2,s}, \ \omega \ 2\gamma_0, \tau_0 \text{-} diofanteo, \tag{5.2.2}$$

dove  $\rho_0$  soddisfa le ipotesi del teorema 5.1.9, allora fissati  $\gamma \leq \gamma_0, \tau \geq \tau_0 \in \mathbb{R}_+, e N_0 \gg 1$ , se esiste  $s_0 \leq s$  per cui è verificata la condizione

16 
$$\delta_0 N_0^{\tau} \leq 1$$
, per  $\delta_0 := \frac{|P_0|_{s_0}^{\gamma, \mathcal{L}}}{\gamma_0}$ ,

allora posto  $\mathcal{I}_1$  l'insieme definito da

$$\mathcal{I}_1 = \{ \omega \in \mathbb{R}^d \ t.c. \ \omega \ e \ 2\gamma, \tau \text{-} diofanteo \ e \ |\omega \cdot \ell \pm 2\rho_0(\lambda)| \ge \gamma N_0^{-\tau} \ per \ |\ell| \le N_0 \}$$

per ogni  $\lambda \in \mathcal{I}_1$  esiste il cambiamento di coordinate definito da

$$G_{$$

che coniuga il sistema 5.2.2 a

$$\dot{\mathtt{w}}_1 = (\mathrm{i}
ho_1(\lambda) + P_1(\omega t)) \hspace{0.1 cm} \mathtt{w}_1$$

dove  $\rho_1(\lambda) = \rho_0(\lambda) + [P_0], P_1(\omega t) \in \mathscr{S}_{2,s_1} \ \forall \ s_1 \leq s_0 \ e \ valgono \ le \ seguenti \ stime$ 

$$\frac{|P_1|_{s_1}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma} \le 8 \frac{(|P_0|_{s_0}^{\gamma,\mathcal{I}})^2}{\gamma^2} N_0^{2\tau} + e^{-(s_0 - s_1)N_0} \frac{|P_0|_{s_0}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma}$$

Inoltre  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_0 \setminus \mathbf{R}_0$ , dove  $\mathbf{R}_0 = \bigcup_{|\ell| \le N_0} \mathbf{R}_{\ell}^{(0)}$  è un'unione finita di intervalli di misura  $2\gamma N_0^{-\tau}$ .

*Dimostrazione.* La dinamica di partenza risulterà essere quella espressa in 5.2.2. E' importante sottolineare che  $\rho_0(\lambda)$  è una funzione  $C^1$  in  $\mathcal{I}_0$  e inoltre

$$|\rho_0(\lambda)| \le 2|\lambda|$$
 e  $|\frac{d}{d\lambda}\rho_0(\lambda)| \ge \frac{1}{2}.$ 

Come da ipotesi, nella norma introdotta nella sezione precedente la perturbazione ha taglia piccola, ossia fisso  $s_0$  in modo che

$$\frac{|P_0|_{s_0}^{\gamma, \mathcal{L}}}{\gamma} := \delta_0 \ll 1.$$

Per quanto detto nel teorema 5.1.4, possiamo, una volta fissati  $\gamma_0, \tau_0 \in \mathbb{R}_+$ , scegliere  $\omega \in \mathbb{R}^d$ diofanteo senza perdere di generalità.

Innanzitutto effettuiamo quello che viene comunemente chiamato taglio ultravioletto (UV), ossia fissiamo  $N_0$  sufficientemente grande e spezziamo, come già visto, l'espansione in serie di Fourier di P nel seguente modo:

$$P_0 = P_{$$
In questo modo il termine  $P_{\geq N_0}^{(0)}$  ha taglia molto piccola rispetto al primo termine, in quanto  $P_0$  è una funzione analitica. Perciò possiamo trascurare le code in modo da cercare un cambio di coordinate

$$G_{$$

che cancella i termini del primo ordine in  $P^{(0)}_{< N_0}$ .

Per trovare la generatrice, scrivo l'equazione omologica in Fourier che abbiamo già visto più volte

$$\widehat{P}_{0}(\ell) + i\rho_{0}(\lambda)[\widehat{\mathbf{S}}_{0}(\ell), \mathbf{E}] - i(\omega \cdot \ell)\widehat{\mathbf{S}}_{0}(\ell) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < |\ell| \le N_{0}.$$
(5.2.3)

In questo modo troviamo gli elementi di matrice per  $\widehat{S}_0(\ell)$ , che saranno, per  $0 < |\ell| \le N_0$ :

$$\widehat{\mathbf{S}}_{0}^{++}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{0}^{++}(\ell)}{i(\omega \cdot \ell)} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{--}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{0}^{--}(\ell)}{i(\omega \cdot \ell)} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{+-}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{0}^{+-}(\ell)}{i(\omega \cdot \ell + 2\rho_{0}(\lambda))} \qquad \widehat{\mathbf{S}}_{0}^{-+}(\ell) = \frac{\widehat{P}_{0}^{-+}(\ell)}{i(\omega \cdot \ell - 2\rho_{0}(\lambda))}$$

Con gli stessi ragionamenti effettuati nel caso periodico, concludiamo che la matrice  $S^{(0)}_{< N_0}$  appartiene all'algebra  $\mathscr{S}_{2,s_0}$ .

In questo caso, però, bisogna stare attenti alla definizione di questi elementi di matrice. Per quanto riguarda  $\hat{\mathbf{S}}_0^{++}(\ell)$  e  $\hat{\mathbf{S}}_0^{--}(\ell)$ , si ha, dalla condizione diofantea, che

$$|\omega \cdot \ell| \ge \frac{2\gamma_0}{|\ell|^{\tau_0}} \ge 2\gamma N_0^{-\tau} \quad \text{per} \quad |\ell| \le N_0, \text{ e per } \gamma \le \gamma_0, \ \tau \ge \tau_0.$$
(5.2.4)

Mentre per quanto concerne gli elementi sull'antidiagonale, affinchè siano ben definiti deve valere che

$$|\omega \cdot \ell \pm 2\rho_0(\lambda)| \ge \gamma N_0^{-\tau}$$
 dove  $\gamma \le \gamma_0$  per  $\tau \ge \tau_0$  e  $|\ell| \le N_0$ 

Questa condizione ci permette di definire le cosiddette zone di risonanza all'ordine 0 come

$$\mathbf{R}_{\ell}^{(0)} := \{ \lambda \in \mathcal{I}_0 \quad t.c. \quad |\omega \cdot \ell \pm 2\rho_0(\lambda)| \le \gamma N_0^{-\tau} \}, \quad \ell \in \mathbb{Z}^d, |\ell| \le N_0 \quad \gamma \le \gamma_0, \tau \ge \tau_0.$$

che sono caratterizzate dal seguente

**Lemma 5.2.3.** Le zone di risonanza all'ordine 0, per  $|\ell| \leq N_0$ , sono disgiunte, ossia

$$\mathbf{R}_{\ell_0}^{(0)} \bigcap \mathbf{R}_{\ell_1}^{(0)} = \emptyset \quad \forall \quad \ell_0, \ell_1 \in \mathbb{Z}^d \quad tali \ che \ |\ell_0|, |\ell_1| \le N_0$$

Dimostrazione. Per assurdo sia

$$\mathbf{R}_{\ell_0}^{(0)}\bigcap\mathbf{R}_{\ell_1}^{(0)}\neq \emptyset$$

allora avremo che

$$|\omega \cdot (\ell_0 - \ell_1)| = |(\omega \cdot \ell_0 - 2\rho_0(\lambda)) - (\omega \cdot \ell_1 - 2\rho_0(\lambda))| \le |\omega \cdot \ell_0 - 2\rho_0(\lambda)| + |\omega \cdot \ell_1 - 2\rho_0(\lambda)| \le 2\gamma N_0^{-\tau}$$
allora, per quanto sappiamo dalla 5.2.4, se  $\gamma \le \gamma_0, \tau \ge \tau_0$  è verificato il lemma.

In questo modo, ho ottenuto le due condizioni

- $|\omega \cdot \ell| \ge 2\gamma N_0^{-\tau}$ ,
- $|\omega \cdot \ell \pm 2\rho_0(\lambda)| \ge \gamma N_0^{-\tau}$  per  $\gamma \le \gamma_0, \tau \ge \tau_0$  e  $|\ell| \le N_0$ .

per poter effettuare il cambiamento di coordinate cercato. Grazie a queste due condizioni, infatti, la generatrice del cambiamento di variabili è ben definita, e posso applicare il procedimento iterativo che abbiamo già imparato ad usare nel caso periodico.

Dunque in questo caso l'equazione omologica 5.2.3, e quindi la matrice  $S^{(0)}_{< N_0}$ , è definita non più su tutto  $\mathcal{I}_0$ , ma su

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_0 \setminus \mathbf{R}_0 \quad \text{dove} \quad \mathbf{R}_0 = \bigcup_{|\ell| < N_0} \mathbf{R}_{\ell}^{(0)}$$

in modo tale che  $\mathbf{R}_0$  sia un'unione finita di intervalli, come suggerito dal teorema 5.1.9

Per conoscere quanto vale la misura delle zone di risonanza, per quanto detto nel lemma 5.2.3 vale la seguente stima

mis 
$$(\mathbf{R}_0) \leq \gamma 2^d N_0^{d-\gamma}$$

dove abbiamo banalmente stimato il numero di intervalli, per poi moltiplicarlo per la loro lunghezza. Dunque basta scegliere  $\tau \geq 2d + 1$  e  $N_0$  sufficientemente grande in modo che tale insieme abbia misura arbitrariamente piccola.

Per le stime sulla taglia della matrice  ${\bf S}_0$  bisogna ricordarsi che ora la norma controlla anche la derivata

$$\widehat{|\mathbf{S}_{$$

ma dalle stime su  $\rho_0$  possiamo vedere facilmente che

$$|\widehat{\mathbf{S}_{$$

dunque la condizione di piccola che devo imporre per poi far convergere l'intero procedimento ora diventa

$$\frac{|P_{$$

Come abbiamo già visto, il cambiamento di coordinate definito da  $G^{(0)}_{< N_0}$  in  $\mathcal{I}_1$ , congiuga il sistema iniziale a

$$\dot{\mathbf{w}}_{1} = \{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{$$

ma ora sostituendo

$$P_0 = P_{N_0}^{(0)} + [P_0] \quad e \quad -\dot{\mathbf{S}}_{N_0}^{(0)} + [P_0]$$

si arriva alla nuova dinamica espressa da

$$\dot{\mathbf{w}}_{1} = (i\rho_{1}(\lambda) + P_{1}(\omega t)) \, \mathbf{w}_{1} \quad \text{dove}$$

$$P_{1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{N_{0}}^{(0)}; \qquad \rho_{1}(\lambda) = \rho_{0}(\lambda) + [P_{0}].$$
(5.2.5)

Inoltre se vogliamo delle stime quantitative sulla taglia di  $P_1$ , notiamo che rispetto alle stime già effettuate nel caso periodico, bisogna solo aggiungere la stima della taglia di  $P_{>N_0}^{(0)}$ . Dunque, dalle proprietà elencate in 5.1.6 sappiamo che

$$\frac{|P_1|_{s_1}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma} \le 8 \frac{(|P_0|_{s_0}^{\gamma,\mathcal{I}})^2}{\gamma^2} N_0^{2\tau} + e^{-(s_0 - s_1)N_0} \frac{|P_0|_{s_0}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma} = 8\delta_0^2 N_0^{2\tau} + e^{-(s_0 - s_1)N_0} \delta_0 := \delta_1.$$

$$(5.2.6)$$

**Osservazione 5.2.4.** La dinamica descritta in 5.2.5 corrispondente alla variabile  $w_1$  rispetta le stesse ipotesi di partenza della dinamica descritta in 5.2.2 corrispondente alla variabile  $w_0$ , ossia vale che

$$|\rho_1(\lambda)| \le 2|\lambda| \quad e \quad |\frac{d}{d\lambda}\rho_1(\lambda)| \ge \frac{1}{2}.$$

Questo si vede facilmente poichè, dalla definizione di  $\rho_1(\lambda), \forall \lambda \in \mathcal{I}_0$ 

$$|\rho_1(\lambda)| \le |\rho_0(\lambda)| + |[P_0]| \le 2|\lambda| + \delta_0 \gamma \le 2|\lambda|(1+\delta_0).$$

Mentre per la derivata sfrutto il fatto che

$$\left|\frac{d}{d\lambda}[P_0]\right| \le \sup_{\lambda \in \mathcal{I}_1} \left|\frac{dP_0}{d\lambda}\right|_{s_0} \le \frac{|P_0|_{s_0}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma} := \delta_0$$

e dunque è evidente la validità della seguente stima

$$\left|\frac{d}{d\lambda}\rho_1(\lambda)\right| \ge \left|\frac{d}{d\lambda}\rho_0(\lambda)\right| - \left|\frac{d}{d\lambda}[P_0]\right| \ge 1 - \delta_0.$$

Queste relazioni ci permetteranno di applicare il teorema 5.1.9, e dunque avere la sicurezza che le regioni di risonanza siano unioni di intervalli.

Questa osservazione costituisce la base di partenza per poter applicare il

### 5.2.2 Primo passo

**Lemma 5.2.5.** Data l'equazione differenziale definita in  $\mathbb{C}^2$  da

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = (i\rho_1(\lambda) + P_1(\omega t))\mathbf{w}_1 \quad con \quad P_1(\omega t) \in \mathscr{S}_{2,s_1}, \ \omega \ 2\gamma_0, \tau_0 \text{-} diofanteo, \tag{5.2.7}$$

dove  $\rho_1(\lambda) = \rho_0(\lambda) + [P_0]$  soddisfa le ipotesi del teorema 5.1.9, allora fissati  $\gamma \leq \gamma_0, \tau \geq \tau_0 \in \mathbb{R}_+, N_1 \geq N_0 \gg 1$ , se vale la condizione

16 
$$\delta_1 N_1^{\tau} \le 1$$
, per  $\delta_1 := \frac{|P_1|_{s_1}^{\gamma, \mathcal{L}}}{\gamma_1}$ 

allora posto  $\mathcal{I}_2$  l'insieme definito da

$$\mathcal{I}_2 = \{ \omega \in \mathbb{R}^d \ t.c. \ \omega \ e \ 2\gamma, \tau \text{-diofanteo} \ e \ |\omega \cdot \ell \pm 2\rho_1(\lambda)| \ge \gamma N_1^{-\tau} \ per \ |\ell| \le N_1 \}$$

per ogni  $\lambda \in \mathcal{I}_2$  esiste il cambiamento di coordinate definito da

$$G_{$$

che coniuga il sistema 5.2.2 a

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = (\mathrm{i}\rho_2(\lambda) + P_2(\omega t)) \mathbf{w}_2 \quad dove \quad \rho_2(\lambda) = \rho_1(\lambda) + \chi_{\mathcal{I}_1}[P_1]$$

dove  $\chi_{\mathcal{I}_1}$  è una funzione caratteristica liscia, e dove  $P_2(\omega t) \in \mathscr{S}_{2,s_2} \forall s_2 \leq s_1$  e valgono le seguenti stime

$$\frac{|P_2|_{s_2}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma} \le 8 \frac{(|P_1|_{s_1}^{\gamma,\mathcal{I}})^2}{\gamma^2} N_0^{2\tau} + e^{-(s_1 - s_2)N_0} \frac{|P_1|_{s_1}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma}.$$

Inoltre  $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 \setminus \mathbf{R}_1$ , dove  $\mathbf{R}_1 = \bigcup_{|\ell| \le N_1} \mathbf{R}_{\ell}^{(1)}$  è un'unione finita di intervalli di misura  $2\gamma N_1^{-\tau}$ 

Dimostrazione. Questa volta la dinamica di partenza è espressa in 5.2.7 con  $\rho_1(\lambda) \in \mathcal{I}_0$  e dove  $\delta_1$  è come definito in 5.2.6. Ora fisso  $N_1 \ge N_0$  e  $s_1 \le s_0$  tale che

$$\delta_1 N_1^{\tau} = \frac{|P_1|_{s_1}^{\gamma, \mathcal{I}}}{\gamma} N_1^{\tau} \le \frac{1}{16}$$

e, riapplicando lo stesso procedimento del passo zero, cerco il cambiamento di coordinate definito da

$$G_{$$

che coniuga il sistema 5.2.7 con

$$\dot{\mathbf{w}}_{2} = (i\tilde{\rho_{2}}(\lambda) + P_{2}(\omega t)) \mathbf{w}_{2}$$
  
dove  $\tilde{\rho_{2}}(\lambda) = \rho_{1}(\lambda) + [P_{1}], \ e \ P_{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{N_{1}}^{(1)}.$   
(5.2.8)

Ovviamente, per effettuare il cambiamento di coordinate abbiamo risolto l'equazione omologica

$$\widehat{P_1}(\ell) + i\rho_1(\lambda)[\widehat{S_1}(\ell), \mathbb{E}] - i(\omega \cdot \ell)\widehat{S_1}(\ell) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < |\ell| \le N_1$$
(5.2.9)

e dunque la generatrice sarà definita in

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 \setminus \mathbf{R}_1$$
  
dove  $\mathbf{R}_1 = \bigcup_{|\ell| < N_1} \mathbf{R}_{\ell}^{(1)}$ , e  $\mathbf{R}_{\ell}^{(1)} = \{\lambda \in \mathcal{I}_1 \ t.c. \ |\omega \cdot \ell \pm 2\rho_1(\lambda)| \le \gamma N_1^{-\tau}\}$ 

Il problema che si pone ora è che se consideriamo la dinamica di 5.2.8, la funzione  $\tilde{\rho}_2(\lambda)$  non è ben definita in quanto  $\rho_1(\lambda)$  è una funzione definita su  $\mathcal{I}_0$ , mentre  $[P_1]$  su  $\mathcal{I}_1$ . Allora estendiamo  $[P_1]$  su tutta  $\mathcal{I}_0$  con una funzione ausiliaria liscia definita in tal modo

$$\chi_{(\mathcal{I}_1)} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda \text{ è tale che} \quad |\omega \cdot \ell \pm 2\rho_1(\lambda)| \le \frac{\gamma}{2} N_1^{-\tau} \quad \text{per } |\ell| \le N_1 \\ 1 & \text{se} \quad \lambda \in \mathcal{I}_1 \end{cases}$$

e si congiunge in maniera  $\mathcal{C}^1$  tra le zone in cui la funzione è nulla e quelle in cui vale 1.

In questo modo, nella nuova dinamica, ho definito

$$\rho_2(\lambda) = \rho_1(\lambda) + \chi_{(\mathcal{I}_1)}[P_1]$$

su tutto  $\mathcal{I}_0$  che è un insieme connesso.

Come nel caso precedente è possibile ottenere la stessa stima sulla taglia di  $P_2$ :

$$\frac{|P_2|_{s_2}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma} \le 8\delta_1^2 N_1^{2\tau} + e^{-(s_1 - s_2)N_1} \delta_1 := \delta_2.$$
(5.2.10)

**Osservazione 5.2.6.** Anche in questo caso valgono le stime necessarie per applicare il prossimo passo definite da

$$|\rho_2(\lambda)| \le 2|\lambda| \quad e \quad |\frac{d}{d\lambda}\rho_2(\lambda)| \ge \frac{1}{2}.$$

La prima disuguaglianza è banalmente verificata in quanto

$$|\rho_2(\lambda)| \le |\rho_1(\lambda)| + |[P_1]| \le 2|\lambda|(1+\delta_1)$$

per la seconda, derivando il prodotto otteniamo

$$\left|\frac{d}{d\lambda}\rho_{2}(\lambda)\right| \geq \left|\frac{d}{d\lambda}\rho_{1}(\lambda)\right| - \left|\chi_{(\mathcal{I}_{1})}\right| \left|\frac{d}{d\lambda}[P_{0}]\right| - \left|\frac{d}{d\lambda}\chi_{(\mathcal{I}_{1})}\right| \left|[P_{0}]\right| \geq (1 - \delta_{0}) - \delta_{1}(1 + N_{0}^{\tau}).$$

Grazie a queste osservazioni, procediamo ad effettuare tutti i passi in modo analogo a come abbiamo effettuato l'ultimo passo.

### 5.2.3 Iterazione

Lemma 5.2.7. Se si suppone di aver compiuto l'n-esimo passo, ossia che la dinamica sia descritta da

$$\dot{\mathbf{w}}_n = (\mathrm{i}\rho_n(\lambda) + P_n(\omega t)) \,\,\mathbf{w}_n \tag{5.2.11}$$

dove

$$\rho_n(\lambda) = \rho_{n-1}(\lambda) + \chi_{(\mathcal{I}_{n-1})}[P_{n-1}]$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{N_{n-1}}^{(n-1)} \qquad (5.2.12)$$

$$P_n \ quasi \ periodica \in \mathscr{S}_{2,s_n} con \ \omega \ 2\gamma_0, \tau_0 \text{-} diofanteo$$

allora fissati  $\gamma, \tau > 0$  ( $\gamma \leq \gamma_0, \tau \geq \tau_0 \in \mathbb{R}_+$ ), con una corretta scelta dei parametri, come la seguente:

1. 
$$s_n = s_0(1 - \sum_{j=0}^n 2^{-j-1}), \qquad s_n \searrow \frac{s_0}{2}$$
  
2.  $N_n = N_0 \ 4^n, \qquad N_n \nearrow \infty$   
3.  $\delta_n = \frac{|P_n|_{s_n}^{\gamma, \mathcal{I}}}{\gamma} \le \delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^n + 1}$ 

esiste un insieme  $\mathcal{I}_{n+1}$  di misura positiva in modo che per le stime di piccolezza dei parametri iniziali si abbia

$$\delta_n N_n^{\tau} := \frac{|P_n|_{\mathcal{S}_n}^{\gamma, \mathcal{I}}}{\gamma} N_n^{\tau} \le \frac{1}{16}$$

e per ogni  $\lambda \in \mathcal{I}_{n+1}$  sia possibile definire il cambiamento di coordinate  $G_{< N_n}^{(n)}$  che coniuga il sistema 5.2.11 con

$$\dot{\mathbf{w}}_{n+1} = (\mathbf{i}\rho_{n+1}(\lambda) + P_{n+1}(\omega t)) \mathbf{w}_{n+1}$$

dove valgono le stesse ipotesi per poter iterare il passo, in particolare:

$$\frac{|P_{n+1}|_{s_{n+1}}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma} \le 8\delta_n^2 N_n^{2\tau} + e^{-(s_n - s_{n+1})N_n} \delta_n \le \delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^{n+1} + 1}.$$

Inoltre  $\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n \setminus \mathbf{R}_n$ , dove  $\mathbf{R}_n = \bigcup_{|\ell| \le N_n} \mathbf{R}_{\ell}^{(n)}$  è un'unione finita di intervalli di misura  $2\gamma N_n^{-\tau}$ .

*Dimostrazione.* In questo caso pertiamo da 5.2.11. Date le scelte effettuate per i parametri, esse banalmente verificate per i primi passi.

Ora  $P_n$  è definita su  $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_{n-1} \setminus \mathbf{R}_{n-1}$ , e inoltre conosciamo delle stime sulla taglia di tale matrice, infatti

$$\frac{|P_n|_{s_n}^{\gamma,\mathcal{L}}}{\gamma} \le \delta_n := 8\delta_{n-1}^2 N_{n-1}^{2\tau} + e^{-((s_{n-1}) - (s_n))N_{n-1}} \delta_{n-1} \ll 1$$

e in particolare abbiamo fissato ${\cal N}_0$ tale che

$$\delta_0 N_0^\tau \le \frac{1}{16}.\tag{5.2.13}$$

Questa condizione sarà la condizione principale per permettere di iterare il nostro procedimento.

Inoltre sappiamo che  $\rho_n(\lambda)$  è continua e derivabile su tutto  $\mathcal{I}_0$  e valgono le seguenti disuguaglianze

$$|\rho_n(\lambda)| \le 2|\lambda|(1+\delta_{n-1}) \le 2|\lambda| \quad e \quad |\frac{d}{d\lambda}\rho_n(\lambda)| \ge 1-\delta_0 \sum_{j=1}^n 2^{-j} \ge \frac{1}{2}.$$
 (5.2.14)

Vogliamo verificare l'induzione sui passi, perciò verifichiamo che si possa effettuare il passo (n+1)esimo.

**Osservazione 5.2.8.** Dalla scelta dei parametri descritta sopra, la condizione 5.2.13 implica che sia verificata la disuguaglianza

$$\delta_n N_n^{\tau} \le \frac{1}{16}.$$

In modo da poter effettuare il passo (n+1)esimo

Infatti basta usare le due scelte 1,2 per notare che

$$\delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^n + 1} 4^{\tau n} N_0^{\tau} \le (\sup_n e^{-(\frac{3}{2})^n + 1} 4^{\tau n}) \delta_0 N_0^{\tau} = \alpha \ \delta_0 N_0^{\tau} \le \frac{1}{16}$$

è verificata banalmente dalla 5.2.13.

Ora, dunque, verifico che si possa compiere il passo n+1 il modo da terminare l'induzione. Innanzitutto dobbiamo effettuare il taglio ultravioletto e risolvere l'equazione omologica per cercare la generatrice del cambiamento di coordinate

$$\widehat{P}_n(\ell) + i\rho_n(\lambda)[\widehat{S}_n(\ell), \mathbf{E}] - i(\omega \cdot \ell)\widehat{S}_n(\ell) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < |\ell| \le N_n.$$
(5.2.15)

Il ragionamento è lo stesso effettuato in tutti i passi: dato che  $P_n$ , definito in  $\mathcal{I}_n$ , appartiene all'algebra  $\mathcal{S}_{2,s_n}$ , allora anche  $G_{< N_n}^{(n)} = e^{\mathbf{s}_{< N_n}^{(n)}} \in \mathcal{G}_{2,s_n}$ , e allora posso coniugare il sistema e portarlo nelle coordinate n+1.

Per verificare che nelle nuove variabili il sistema sia ben definito verifico l'ultima parte del lemma, ossia che valga

$$\frac{|P_{n+1}|_{s_{n+1}}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma} \le 8\delta_n^2 N_n^{2\tau} + e^{-(s_n - s_{n+1})N_n} \delta_n := \delta_{n+1} \le \delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^{n+1} + 1}$$

sostituendo i parametri e spezzando in due la disuguaglianza ottengo

$$8N_0^{2\tau} 4^{2\tau n} \delta_0^2 e^{-2(\frac{3}{2})^n + 2} \le \frac{1}{2} \delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^{n+1} + 1}$$
$$\delta_0 N_0^{2\tau} 4^{2\tau n} e^{(\frac{3}{2} - 2)(\frac{3}{2})^n} \le \frac{1}{16e}$$
$$\delta_0 N_0^{2\tau} \le \frac{1}{16eC} \le \frac{1}{16}$$

dove abbiamo utilizzato che

$$C = \sup_{n} 4^{2\tau n} e^{(\frac{3}{2} - 2)(\frac{3}{2})^{n}}.$$

Per la seconda parte della disuguaglianza, invece notiamo che  $s_n - s_{n+1} = s_0 2^{-(n+2)}$ , e da questo verifico la disuguaglianza per

$$\begin{split} \delta_0 e^{[-(\frac{3}{2})^n + 1 - s_0 2^{(n-2)} N_0]} &\leq \frac{1}{2} \delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^{n+1} + 1} \\ 2e^{[(\frac{3}{2} - 1)(\frac{3}{2})^n - s_0 N_0 2^{(n-2)}]} &\leq 1 \\ & (\frac{1}{2})(\frac{3}{2})^n \leq s_0 N_0 2^{(n-2)} \end{split}$$

che è verificata se  $s_0 N_0 \ge 2$ . Ciò che resta da capire per verificare che la dinamica nel passo induttivo sia ben definita sono le proprietà della funzione  $\rho_{n+1}(\lambda)$ .

#### Osservazione 5.2.9. Data

$$\rho_{n+1}(\lambda) = \rho_n(\lambda) + \chi_{(\mathcal{I}_n)}[P_n]$$

continua e derivabile su tutto  $\mathcal{I}_0$ , valgono le seguenti affermazioni:

$$|\rho_{n+1}(\lambda)| \le 2|\lambda|(1+\delta_n) \le 2|\lambda| \quad e \quad |\frac{d}{d\lambda}\rho_{n+1}(\lambda)| \ge 1-\delta_0 \sum_{j=1}^{n+1} 2^{-j} \ge \frac{1}{2}.$$
 (5.2.16)

Dalle scelte fatte nel passo precedente in 5.2.14, la prima disuguaglianza è banale, per la seconda invece si ha che

$$\begin{aligned} |\frac{d}{d\lambda}\rho_{n+1}(\lambda)| &\geq |\frac{d}{d\lambda}\rho_n(\lambda)| - |\chi_{(\mathcal{I}_n)}||\frac{d}{d\lambda}[P_n]| - |\frac{d}{d\lambda}\chi_{(\mathcal{I}_n)}||[P_n]| \geq 1 - \delta_0 \sum_{j=1}^n 2^{-j} - \delta_n(1+N_0^{\tau}) \geq \\ &\geq 1 - \delta_0 \sum_{j=1}^n 2^{-j} - \delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^n + 1}(1+N_0^{\tau}) \end{aligned}$$

e dunque verifico la disugualianza se

$$1 - \delta_0 \sum_{j=1}^{n+1} 2^{-j} \ge 1 - \delta_0 \sum_{j=1}^n 2^{-j} - \delta_0 e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} (1 + N_0^\tau)$$
$$2^{-(n+1)} - e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} (1 + N_0^\tau) \le 0$$

che per un n sufficientemente grande è banalmente soddisfatta.

Ricapitolando, abbiamo fatto il passo n+1 e ora la dinamica è descritta da

$$\begin{split} \dot{\mathbf{w}}_{n+1} &= (\mathbf{i}\rho_{n+1}(\lambda) + P_{n+1}(\omega t)) \ \mathbf{w}_{n+1} \quad \text{dove} \\ P_{n+1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ad \ \mathbf{S}_{N_n}^{(n)} \\ \end{split}$$

dove

- $\rho_{n+1}(\lambda)$  è continua e derivabile su tutto  $\mathcal{I}_0$  e inoltre valgono le 5.2.16 in modo da poter affermare che  $P_{n+1}$  sia definita su  $\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n \setminus \mathbf{R}_n$  dove  $\mathbf{R}_n$  è un'unione finita di intervalli (i gaps),
- $\delta_{n+1} := \frac{|P_{n+1}|_{s_{n+1}}^{\gamma,\mathcal{I}}}{\gamma} \le \delta_0 e^{-(\frac{3}{2})^{n+1}+1}$ , e in particolare  $\delta_{n+1} N_{n+1}^{\tau} \le \frac{1}{16}$ ,
- $\bullet\,$ posso estendere a n+1 la validità delle successioni dei parametri 1,2,3.

**Lemma 5.2.10.** Considerata l'equazione 5.2.1 e rispettate le ipotesi di piccolezza del teorema 5.2.1, data la scelta dei parametri  $s_n$ ,  $N_n \in \delta_n$  effettuata, esiste un insieme  $\mathcal{I}_{\infty}$  di misura grande tale che per ogni  $\omega \in \mathcal{I}$  l'iterazione definita sui cambiamenti di coordinate converge per  $n \longrightarrow \infty$ , ossia posso definire

$$G_{$$

che coniuga il sistema 5.2.1 a

$$\dot{\mathbf{w}}_{\infty} = (\mathbf{i}\rho_{\infty}\mathbf{E})\mathbf{w}_{\infty}.\tag{5.2.17}$$

*Dimostrazione.* A questo punto, per quanto detto nell'iterazione precedente, possiamo concludere il nostro schema iterativo e mandare  $n \rightarrow \infty$ . Sempre per gli stessi motivi già scritti nel caso periodico, avremo che la successione di cambiamenti di coordinate definita da

$$G_{$$

è di Cauchy rispetto alla norma  $|\cdot|_s^{\gamma,\mathcal{I}}$ , e dunque mandando  $n \longrightarrow \infty$  resteremo nel gruppo.

In questo modo abbiamo generato un cambiamento di coordinate che coniuga in sistema iniziale con

$$\dot{\mathbf{w}}_{\infty} = (\mathbf{i}\rho_{\infty}(\lambda)\mathbf{E})\mathbf{w}_{\infty}.$$
(5.2.18)

Dove i parametri si ottengono mandando  $n \longrightarrow \infty$  nelle successioni scritte precedentemente.  $\Box$ 

In questo modo abbiamo dimostrato che nelle zone di non risonanza siamo nello spettro continuo dell'operatore con potenziale quasi-periodico.

# Appendice A: Spettro per Energie positive

In questa appendice sarà trattato brevemente il caso in cui l'equazione di Schrödinger 1.1.3 presenta valori di E > 0, perciò fissato  $E = \lambda^2$ , studiamo

$$u_{xx} + v(x)u = \lambda^2 \ u \,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
(5.2.19)

Daremo solo un accenno alla dimostrazione della struttura dello spettro in questo caso, poichè i metodi con cui si dimostra sono pressocchè uguali a quelli utilizzati nel capitolo 4.

Anche in questo caso la struttura algebrica dietro i cambiamenti di coordinate risulta fondamentale. In tal caso, però, non necessitiamo più di un'algebra di matrici definite sul campo complesso, perciò useremo l'algebra di Lie

$$\mathscr{S}_{2,s} = \{ M(t) \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R}) \ t.c. \ Tr(M(t)) = 0 \}$$

e definiamo di conseguenza il gruppo di Lie

$$\mathscr{G}_{2,s} = \{ G(t) \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R}) \ t.c. \ G(t) = e^{M(t)} \ \text{dove} \ M(t) \in \mathscr{S}_{2,s} \}.$$

Partendo dall'equazione iniziale, e applicando il seguente cambio di variabili

$$q = \sqrt{\lambda}u, \quad p = \frac{\dot{u}}{\sqrt{\lambda}}$$

ci siamo ridotti così a un sistema dinamico al prim'ordine in  $\mathbb{R}^2$  descritto nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +\lambda - \lambda^{-1} v(x) \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$
(5.2.20)

Una differenza fondamentale tra questo caso e quello studiato in precedenza è che ora non dovremo passare al campo complesso, ma resteremo nei reali. Infatti se definiamo

$$y_1 = \frac{p+q}{\sqrt{2}}, y_2 = \frac{p-q}{\sqrt{2}}, \text{ ossia } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1\\y_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} p\\q \end{pmatrix} \text{ dove } Q := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1\\1 & -1 \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema in  $\mathbb{R}^2$  descritto in tale modo

$$\dot{\mathbf{y}} = W\mathbf{y}, \quad W = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(\lambda, t) & b(\lambda, t) \\ c(\lambda, t) & -a(\lambda, t) \end{pmatrix}, \tag{5.2.21}$$

che con le notazioni che abbiamo già introdotto diventa:

$$\dot{\mathbf{y}} = (\lambda \mathbf{E} + P(\lambda, t))\mathbf{y}, \quad \text{dove} \quad P(\lambda, t) \in \mathcal{S}_{2,s}.$$
 (5.2.22)

Ora inziamo ad applicare gli stessi passi che abbiamo già visto nel caso periodico.

Fissati  $\gamma > 0$  e  $\omega$  tale che  $|\gamma| \leq \frac{\omega}{4}$ , cerco il generatore del primo cambiamento di coordinate  $\mathbf{S}_0 \in \mathscr{S}_{2,s}$  che, risolvendo l'equazione omologica

$$P_0 + \lambda[\mathbf{S}_0, \mathbf{E}] - \dot{\mathbf{S}}_0 = 0,$$

presenta elementi di matrice

$$\mathbf{S}_{0}^{++}(\ell) = \frac{P_{0}^{++}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell)} \qquad \mathbf{S}_{0}^{--}(\ell) = \frac{P_{0}^{--}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell)} \qquad \mathbf{S}_{0}^{+-}(\ell) = \frac{P_{0}^{+-}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell) + 2\lambda} \qquad \mathbf{S}_{0}^{-+}(\ell) = \frac{P_{0}^{-+}(\ell)}{\mathbf{i}(\omega \cdot \ell) - 2\lambda}.$$

In questo modo la condizione di non risonanza sarà dettata da

$$\sqrt{|\omega \cdot \ell|^2 + 4\lambda^2} \ge \gamma. \tag{5.2.23}$$

In questo modo non compare più il problema di piccoli divisori, poichè data la scelta di  $\omega$ , questa condizione di non risonanza è soddisfatta non appena  $\ell$  si discosta da zero, e se  $\ell = 0$  o comunque è molto piccolo, la relazione resta soddisfatta se  $\lambda \geq \frac{\gamma}{2}$ .

Se tale condizione è soddisfatta, dunque in quasi tutto l'asse positivo, allora possiamo iterare senza problemi il cambiamento di coordinate come visto nel capitolo 4, e coniugare il sistema descritto in 5.2.22 a

$$\dot{\mathbf{y}}_{\infty} = \rho_{\infty}(\lambda) \mathbf{E} \mathbf{y}$$

dove  $\rho_{\infty}(\lambda)$  è una funzione analitica.

Arrivati a questo punto risulta evidente che tutto l'intervallo  $\lambda \geq \frac{\gamma}{2}$  è nel risolvente dell'operatore di Schrödinger.

Dunque l'unica zona che ci resta da studiare che potrebbe appartenere allo spettro è quel piccolo intervallo vicino all'origine per cui  $0 \le \lambda \le \frac{\gamma}{2}$ , in cui se  $\ell$  è sufficientemente vicino a zero può accadere che

$$\sqrt{|\omega \cdot \ell|^2 + 4\lambda^2} \le \gamma$$

 $\operatorname{con}\,\omega\geq 4\gamma.$ 

In tal caso procederemo allo stesso modo con cui abbiamo trattato le zone di non risonanza nel caso dello spettro negativo.

Anche in tal caso cercheremo la generatrice del cambiamento di coordinate  $S_0 \in \mathcal{S}_{2,s}$  che, risolvendo l'equazione omologica, avrà matrice dei coefficiente di Fourier con elementi

$$\mathbf{S}_{0}^{++}(\ell) = \begin{cases} \frac{P_{0}^{++}(\ell)}{i(\omega\cdot\ell)} & \text{se } \ell \neq 0\\ 0 & \text{se } \ell = 0 \end{cases} \quad \mathbf{S}_{0}^{--}(\ell) = \begin{cases} \frac{P_{0}^{--}(\ell)}{i(\omega\cdot\ell)} & \text{se } \ell \neq 0\\ 0 & \text{se } \ell = 0 \end{cases}$$
$$\mathbf{S}_{0}^{+-}(\ell) = \begin{cases} \frac{P_{0}^{+-}(\ell)}{i(\omega\cdot\ell)+2\lambda} & \text{se } \ell \neq 0\\ 0 & \text{se } \ell = 0 \end{cases} \quad \mathbf{S}_{0}^{-+}(\ell) = \begin{cases} \frac{P_{0}^{-+}(\ell)}{i(\omega\cdot\ell)-2\lambda} & \text{se } \ell \neq 0\\ 0 & \text{se } \ell = 0 \end{cases}$$

In tal modo risolvendo l'equazione omologica

$$\widehat{P}_0(\ell) + \lambda[\widehat{\mathbf{S}}_0(\ell), \mathbf{E}] - \mathbf{i}(\omega \cdot \ell)\widehat{\mathbf{S}}_0(\ell) = [P_0]$$
(5.2.24)

coniugheremo il sistema 5.2.22 con  $0 \le \lambda \le \frac{\gamma}{2}$  a

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = (\lambda \mathbf{E} + [P_0] + P_1)\mathbf{y}_1 = (K_1 + P_1)\mathbf{y}_1$$

dove  $K_1$  è della forma

$$K_1 = \begin{pmatrix} \lambda + \hat{a}_0(0) & \hat{b}_0(0) \\ \hat{c}_0(0) & -\lambda - \hat{a}_0(0) \end{pmatrix}.$$

A questo si itera il procedimento allo stesso modo dello spettro negativo, e la dinamica finale sarà descritta da

$$\dot{\mathbf{y}}_{\infty} = K_{\infty} \mathbf{y}_{\infty}$$

dove se chiamiamo

$$A_{\infty} = \hat{a}_0(0) + \hat{a}_1(0) + \hat{a}_2(0) + \dots,$$
  

$$B_{\infty} = \hat{b}_0(0) + \hat{b}_1(0) + \hat{b}_2(0) + \dots,$$
  

$$e C_{\infty} = \hat{c}_0(0) + \hat{c}_1(0) + \hat{c}_2(0) + \dots,$$

allora

$$K_{\infty} = \begin{pmatrix} \lambda + A_{\infty} & B_{\infty} \\ C_{\infty} & -\lambda - A_{\infty} \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_{2,s}.$$

Tale matrice presenta autovalori

$$\rho_{\pm} = \pm \sqrt{\lambda^2 - 2A_{\infty}\lambda + B_{\infty}C_{\infty} - A_{\infty}^2}$$

e dunque risulta evidente che può esserci spettro continuo in un intervallo dei  $\lambda$  ancora più ridotto e più vicino a zero, ma per il resto restiamo nel risolvente dell'operatore.

Dunque è possibile dimostrare, a partire dallo schema seguito nello spettro negativo, che l'asse delle energie positive è quasi tutto nel risolvente dell'operatore, a meno di un piccolo intervallo intorno all'origine in cui saremo nello spettro continuo dell'operatore.

# Appendice B: Dimostrazione dell'esponenziale di Lie

Il contenuto di questa appendice riguarda invece la trattazione esaustiva della scrittura del pullback di un campo vettoriale, in particolare dimostreremo in maniera completa quanto utilizzato per i cambi di coordinate nel corso della trattazione perturbativa.

## Lemma 5.2.11. Data l'ODE

$$\dot{x} = V(x) \qquad con \qquad V \in C^{\infty}(U, \mathbb{R}^n)$$

$$(5.2.25)$$

se si applica il cambio di variabili  $x = \Phi(\tau_0, y)$ , dove  $\Phi$  risolve

$$\begin{cases} \Phi_{\tau}(\tau, y) = f(\Phi(\tau, y)) \\ \Phi(0, y) = y \end{cases}$$
(5.2.26)

 $con f \in C^{\infty}(U, \mathbb{R}^n)$  e  $\tau_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  allora nel nuovo sistema di coordinate la dinamica sarà espressa da

$$\dot{y} := W(y) = e^{\tau_0 \cdot ad f(y)} V(y).$$

Vediamo come si arriva a queste conclusioni.

I campi vettoriali analitici possono essere scritti come combinazione lineare dei monomi, ossia

$$V = \sum_{j} \sum_{\substack{a \\ |a|=d+1}} V_{j,a} \quad m_{j,a} \quad dove \quad m_{j,a} = \prod_{i} x_i^{a_i} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}$$

e d è chiamato lo scaling del campo vettoriale. Ovviamente non vi sono problemi di convergenza poichè tali campi sono elementi dello spazio di Banach dei campi vettoriali analitici, e dunque convergono nella norma definita.

Lemma 5.2.12. Dati due campi vettoriali analitici

$$V = Mx$$
  $W = Nx$ 

dove  $M, N \in Mat(n \times n)$  e  $x \in \mathbb{R}$ , se consideriamo il campo vettoriale Z definito come

$$Z = [V, W].$$

Allora si ha che

$$Z = [N, M]x.$$

Dimostrazione.

$$Z = [V, W] = \left[\sum_{j} M_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{l} N_{kl} x_l \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = \sum_{j} M_{ij} N_{kl} x_j \delta_{il} \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{l} N_{kl} M_{ij} x_l \delta_{kl} \frac{\partial}{\partial x_i}$$
inque

e du

$$Z = [N, M]x.$$

Dal teorema di dipendenza  $C^1$  dai dati iniziali, sappiamo che per dei tempi abbastanza ridotti possiamo considerare il flusso di una ODE come un cambiamento di coordinate. Questo risulta molto comodo per sfruttare le varie proprietà dei commutatori, come vedremo in seguito.

Per usare tali flussi come cambiamenti di coordinate, supponiamo per  $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ , dove U è un insieme aperto, una dinamica descritta da

$$\dot{x} = V(x)$$
 con  $V \in C^{\infty}(U, \mathbb{R}^n).$  (5.2.27)

Allora, per quanto detto in precedenza, possiamo considerare il diffeomorfismo  $x = \Phi(\tau_0, y)$  dove  $\Phi(\tau, y)$  risolve il seguente problema di Chauchy:

$$\begin{cases} \Phi_{\tau}(\tau, y) = f(\Phi(\tau, y)) \\ \Phi(0, y) = y \end{cases}$$
(5.2.28)

dove f <br/>  $\in \, C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$ e $\tau_0$  è in un piccolo intorno di 0 <br/> in modo tale che, per la dipendenza  $C^1$ si abbia che la mappa  $y \Rightarrow \Phi(\tau_0, y)$  sia  $C^1$  in un intorno del dato iniziale. Allora la dinamica delle y sarà descritta dall Pullback del campo vettoriale V, ossia dall'equazione

$$\dot{y} := W(y) = \Phi_*(V(\Phi(\tau_0, y))) = [J_y \Phi(\tau_0, y)]^{-1} \cdot V[\Phi(\tau_0, y)].$$
(5.2.29)

Un soluzione molto importante per rendere più agevole tale pullback è l'esponenziale di Lie. Prima di vedere tale risultato, si riportano dei risultati utili alla dimostrazione.

**Lemma 5.2.13.** Dato un flusso  $\Phi$  che risolve 5.2.28, allora il pullback del campo vettoriale f rispetto al flusso generato dal campo stesso risulta essere

$$\Phi_*(\tau)f = f(y).$$

Dimostrazione. Tale dimostrazione parte dall'evidenza che, per la notazione introdotta prima, dato  $W = \Phi_* f$ , allora

$$\frac{\partial}{\partial \tau} W = \Phi_*([f,V])$$

Ma per le ipotesi date dal lemma, si evince che V = f e, sapendo che il commutatore tra due stessi elementi è sempre nullo, si arriva a impostare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_* f = 0\\ \Phi_* f(\tau = 0, y) = f(y) \end{cases}$$

che presenta soluzione

$$\Phi_*(\tau)f = f(y) \ \forall \ \tau \ \in \ \mathbb{R}.$$

**Lemma 5.2.14.** Il commutatore è un'operazione naturale rispetto ai cambi di coordinate, ossia siano f e g due campi vettoriali  $C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  e sia  $\psi$  un diffeomorfismo che lega

$$x = \psi(y).$$

Allora vale il seguente risultato:

$$\psi_*([f,g]) = [\psi_*f, \psi_*g].$$

Dimostrazione. Ricordando che

$$\psi_* f = (J\psi)^{-1} f(\psi),$$

allora calcoliamo  $(J\psi_*f)\psi_*g$ , che risulta essere

$$\sum_{i} \left(\frac{\partial}{\partial y_{i}}\psi_{*}f\right)(\psi_{*}g)_{i} = \sum_{i} \left[(J\psi)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_{i}}\right)(J\psi)\right]\left[(J\psi)^{-1}g(\psi)\right]_{i}\left[(J\psi)^{-1}f(\psi)\right] - (J\psi)^{-1}\left[Jf(\psi)\right](J\psi)(J\psi)^{-1}g(\psi)$$
$$= \sum_{i} \left[(J\psi)^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial y_{i}}\right)(\psi)\right]\left[(J\psi)^{-1}g(\psi)\right]_{i}\left[(J\psi)^{-1}f(\psi)\right] - (J\psi)^{-1}\left[Jf(\psi)\right]g(\psi).$$

Ora invece determiniamo  $(J\psi_*g)\psi_*f$ , che allo stesso modo sarà pari a

$$\sum_{i} (\frac{\partial}{\partial y_{i}} \psi_{*}g)(\psi_{*}f)_{i}) = \sum_{i} [(J\psi)^{-1}(\frac{\partial J}{\partial y_{i}})(\psi)][(J\psi)^{-1}f(\psi)]_{i}[(J\psi)^{-1}g(\psi)] - (J\psi)^{-1}[Jg(\psi)]f(\psi).$$

Ricordiamo che

$$\sum_{i} (\frac{\partial}{\partial y_i} \psi_* f)(\psi_* g)_i) - \sum_{i} (\frac{\partial}{\partial y_i} \psi_* g)(\psi_* f)_i) = [\psi_* f, \psi_* g]$$

e inoltre quando sottraiamo le espressioni ricavate prima per ottenere  $[\psi_* f, \psi_* g]$ , è importante notare che

$$(J\psi)^{-1}[Jg(\psi)]f(\psi) - (J\psi)^{-1}[Jf(\psi)]g(\psi) = \psi_*([f,g])$$

Dunque per dimostrare la validità del seguente lemma basta dimostrare che:

$$\sum_{i} [(J\psi)^{-1}(\frac{\partial J}{\partial y_{i}})(\psi)][(J\psi)^{-1}g(\psi)]_{i}[(J\psi)^{-1}f(\psi)] = \sum_{i} [(J\psi)^{-1}(\frac{\partial J}{\partial y_{i}})(\psi)][(J\psi)^{-1}f(\psi)]_{i}[(J\psi)^{-1}g(\psi)]$$

Questo si dimostra banalmente utilizzando il lemma di Schwartz, in quanto se chiamo

$$A = (J\psi)^{-1}, \qquad B = (J\psi), \qquad v = Ag(\psi) \quad e \quad \mathbf{w} = Af(\psi)$$

allora è più semplice dimostrare l'equivalenza che cerchiamo, poichè deve valere che

$$\sum_i (\frac{\partial}{\partial y_i} B v_i) \mathbf{w} = \sum_i (\frac{\partial}{\partial y_i} B \mathbf{w}_i) v$$

ma questo equivale a dire che

$$\sum_{i,k} \frac{\partial B_{h,k}}{\partial y_i} v_i \mathbf{w}_k = \sum_{i,k} \frac{\partial B_{h,i}}{\partial y_k} v_i \mathbf{w}_k$$

ma ricordandoci come è stata definita la matrice B, allora dal lemma di Schwartz sappiamo che

$$\frac{\partial B_{h,k}}{\partial y_i} = \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial y_i \partial y_k} = \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial y_k \partial y_i} = \frac{\partial B_{h,i}}{\partial y_k}$$

ed è dunque verificata l'uguaglianza.

**Lemma 5.2.15.** Data l'ODE descritta dall'equazione 5.2.27, se si applica il cambio di variabili  $x = \Phi(\tau_0, y)$ , dove  $\Phi$  risolve 5.2.28, allora, considerata la dinamica nel nuovo sistema di coordinate, essa può essere espressa come

$$\dot{y} := W(y) = e^{\tau_0 \cdot ad \ f(y)} V(y).$$

Dimostrazione. Considera W come una famiglia di funzioni dipendenti anche da  $\tau \in I$ , dove  $I \subset \mathbb{R}$ 

$$W: I \times B_r(x_0) \Rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che

$$W(\tau, y) = \Phi_*(V(\Phi(\tau, y))) = [J_y \Phi(\tau, y)]^{-1} \cdot V[\Phi(\tau, y)]$$

Cerco di trovare l'equazione differenziale che risolve la funzione W (per comodità scriverò  $\Phi(\tau, y) := \Phi \in J_y \Phi := J\Phi$ ).

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -[(J\Phi)^{-1}][\frac{\partial}{\partial \tau}(J\Phi)][(J\Phi)^{-1}](V(\Phi) + [(J\Phi)^{-1}][JV(\Phi)][\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}]$$

Dove è stato usato che per una mappa differenziabile  $A: I \Rightarrow Mat(n \times n)$  vale che

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (A(\tau))^{-1} = -(A(\tau))^{-1} \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} (A(\tau))^{-1}$$

Ora, sapendo che le matrici $J_y\Phi$ e $\frac{\partial}{\partial\tau}\Phi$  commutano, possiamo notare che

$$\frac{\partial}{\partial \tau} J_y \Phi = J_y(f(\Phi) = [J_x f(\Phi)][J_y \Phi]$$

e dunque è possibile riscrivere

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = (J\Phi)^{-1} \{ [J_x V(\Phi)] f(\Phi) - [J_x f(\Phi)] V(\Phi) \}$$

da cui segue che

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = (J\Phi)^{-1}([f,V]) = \Phi_*([f,V]) = [\Phi_*f, \Phi_*V]$$

grazie a quanto visto nel lemma 5.2.14. Usando anche il lemma 5.2.13, e ricordando che  $\Phi_*V = W$ , si trova finalmente il problema di Cauchy legato funzione W che sarà

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} W(\tau, y) = [f(y), W(\tau, y)] \\ W(0, y) = V(y) \end{cases}$$

Che ammette come unica soluzione

$$W(\tau, y) = e^{\tau[f(y), \cdot]} V(y) = \sum_{k} \frac{\tau^{k}}{k!} [f, [f, [\dots[f, V(y)] \dots]]].$$

## Bibliografia

- Batra N., Sheet G., Understanding Basic Concepts of Topological Insulators Through Su-Schrieffer-Heeger (SSH) Model, Resonance, Springer Science and Business Media, 25, no. 6, 765-786, 2020
- [2] Berezin F.A., Shubin M.A., The Schrödinger Equation, Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, v.66, 1991
- [3] Coddington E., Levinson N., Theory of Ordinary Differential Equations, International Series in pure and applies Mathematics McGraw-Hill Book Co. Ltd. 1995
- [4] Chierchia L., Quasi-Periodic Schrödinger operators in one dimension, absolutely continuous spectra, Bloch waves, and integrable Hamiltonian System, Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche, 1986
- [5] Davies E. B., Spectral theory and differential operators, Cambridge University Press, 1995
- [6] Gentile G., Introduzione ai sistemi dinamici. Vol. 2: Meccanica lagrangiana e hamiltoniana., Springer Verlag, 2022
- [7] Haragus M., Johnson M.A., Perkins W.R., Linear Modulational and Subharmonic Dynamics of SpectrallyStable Lugiato-Lefever Periodic Waves, Journal of Differential Equation 280, 315-354 2021.
- [8] Lamour R., Marz R., Winkler R. How Floquet Theory Applies to Index 1 Differential Algebraic Equations Journal of Mathematical Analysis and Applications 217, 372-394, 1998
- [9] Reed M., Simon B., Methods of Modern Mathematical Physics, IV:Analysis of Operators, Academic press Inc., 1978
- [10] Shankar R., Topological Insulator A Review, Yale University New Haven CT 06520, 2018
- [11] Suzuki M.S., Suzuky I. LN Kronig Penny model Solid State Physics, 2015