Corso di Laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

AM220 - Analisi Matematica 4

Docente: Michela Procesi
Tutori: Daniele Salierno, Jacopo Tenan
Tutorato 2

Esercizio 1. Calcolare l'area della regione

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{4}{x},\ \frac{y}{2} \leq x \leq y,\ x,y \geq 0 \right\}$$

Esercizio 2. Siano $r \geq 0$ e $h < r$. Calcolare il volume del solido

$$C_{h,r} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < r^2,\ z \geq h\}$$

Esercizio 3. Calcolare il volume dei solidi

(a) $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{3-2(x^2+y^2)} \right\}$

(b) $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq z \leq x^2+y^2+5,\ x^2+y^2 \leq 4 \right\}$

Esercizio 4. Calcolare il volume della regione di spazio all'interno di

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}$$

e sopra

$$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2(x^2+y^2)\}$$

Esercizio 5. Calcolare gli integrali delle seguenti funzioni sui domini indicati:

(c) $\displaystyle\iint_P (x^2+y^2+3x+1)\ dx\ dy \qquad P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4,\ x \leq |y|\}$

(d) $\displaystyle\iint_E x^2(1+x^2y)\ dx\ dy \qquad E = B(0,2) \backslash B(0,1)$

(e) $\displaystyle\iint_E (x^2+y^2)\ dx\ dy \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq xy \leq 4,\ 2 \leq x^2-y^2 \leq 9\}$

(f) $\displaystyle\iint_E \frac{y}{x^2+y^2}\ dx\ dy \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

(g) $\displaystyle\iint_E y \cos x\ dx\ dy \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-\pi,\pi],\ \leq \tfrac{1}{2} \leq y \leq |\sin(x)|\}$

(h) $\displaystyle\iint_E (x^4-y^4)e^{xy}\ dx\ dy \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2-y^2 \leq xy \leq 1,\ x \geq 0\}$

(i) $\displaystyle\iiint_E \frac{x^2}{4-x^2-y^2-z^2}\ dx\ dy\ dz \qquad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x,y,z \geq 0\}$

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $\displaystyle\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x,y) = f_\infty \in \mathbb{R}$.

Mostrare che

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(0,r)} f(x,y)\ dx\ dy = 1$$