

AM220 - Analisi Matematica 4

DOCENTE: MICHELA PROCESI

TUTORI: DANIELE SALIERNO, JACOPO TENAN

Tutorato III

Esercizio 1. Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:

(a) $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 + e^t \end{pmatrix}$

(b) $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} at \cos(t) \\ at \sin(t) \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^+$

(c) $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t + 2 \cos^2 t \\ 2 \sin t + \sin(2t) \end{pmatrix}$

(d) $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \cos(4t) \\ e^{-3t} \sin(4t) \end{pmatrix}$

(e) $\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x^2}{2}, x \in [-1, 1] \right\}$

Esercizio 2. Integrare le seguenti funzioni sulle curve indicate:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$

(b) $f(x, y, z) = \frac{y + z + 3}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$ $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 1, x + y + z = 1, x \in [2, 6]\}$

(c) $f(x, y) = \sqrt{1 + 3x^2}$ $\gamma : [0, \pi], \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$

(d) $f(x, y, z) = xyz + \frac{|y|}{2x^2 + y^2 + 2z^2}$ $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 = 1, y + z = 0\}$

(e) $f(x, y, z) = \frac{2}{3}x + 4z$ $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) \mapsto \begin{pmatrix} 3t \\ \frac{3}{2}t^2, t^3 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Calcolare l'area delle seguenti superfici.

(a) $\Phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}, z \in [10, 17]\}$

(b) $\Phi = \{(x, y, z) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, 5] \mid z = x^2 + y^2\}$

(c) $\begin{cases} x(\vartheta, \varphi) = R(1 + \cos \vartheta) \cos \varphi \\ y(\vartheta, \varphi) = R(1 + \cos \vartheta) \sin \varphi \\ z(\vartheta, \varphi) = R \sin \vartheta \end{cases} \quad R > 0, (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

Esercizio 4. (a) Calcolare l'integrale di $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sulla superficie

$$\Phi : [-\log 2, \log 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}$$

(b) Calcolare l'area della superficie descritta dal grafico di $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ sul dominio $B(0, 1)$.