Sia $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 , \quad x^2+y^2 < x \}$

calcolare

$$A(D) = \int_D dx\,dy = \int_{\psi^{-1}(D)} |\det J\psi| \, dr\, d\theta$$

$$\psi: \begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases} \qquad |\det J\psi| = r$$

Descrivo D in termini di r, θ

$$\psi^{-1}(D) = \{ (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi) : \quad r^2 < r\cos\theta \}$$

serve $\cos\theta \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\psi^{-1}(D) = \{ (r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} , \quad 0 \leq r < \cos\theta \}$$

$$A(D) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r\, dr = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} [\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

D è un dominio normale anche direttamente rispetto alle (x,y)

$$D: \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad 0 < x < 1 \; , -\sqrt{x-x^2} < y < \sqrt{x-x^2} \right\}$$

(la condizione $0 < x < 1$ è necessaria perché $\sqrt{x-x^2}$ sia BEN DEFINITA)

$$A(D) = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} dy = 2 \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\, dx$$

$$= 2 \int_0^1 \sqrt{x-x^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\, dx = 2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\, dx$$

sembra nettamente + difficile.

Naturalmente il metodo più semplice è RICONOSCERE che D è un dominio la cui area è NOTA!

$$x^2+y^2-x < 0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4} < 0$$

una circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

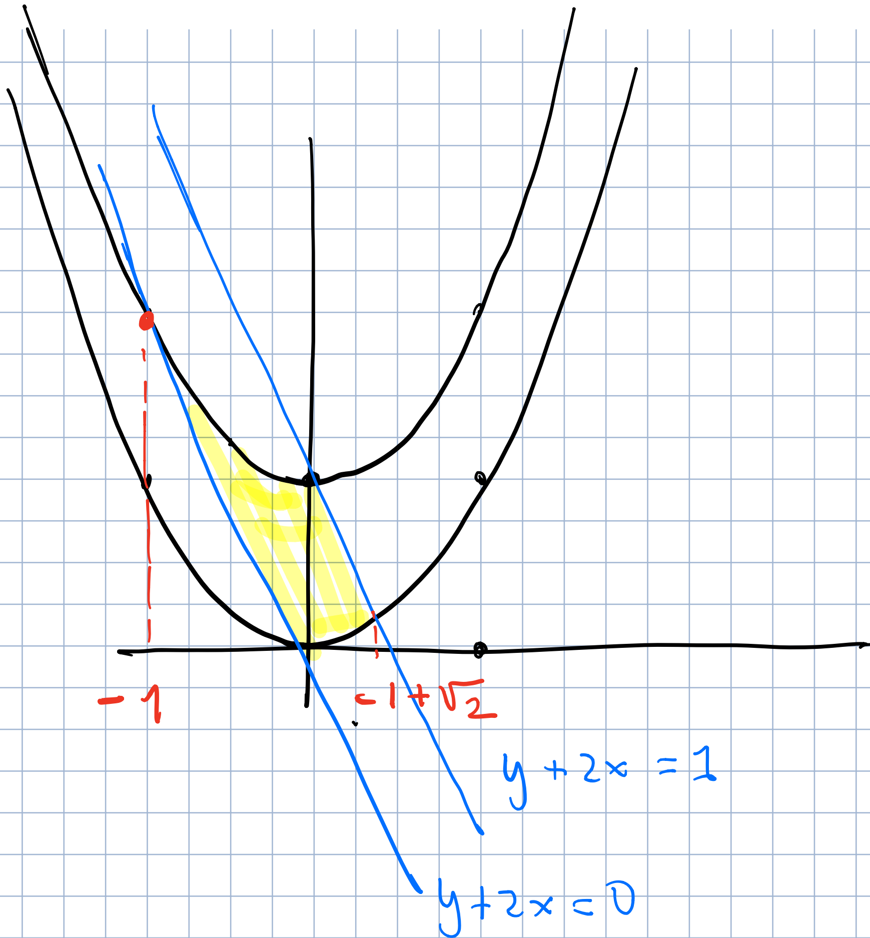
e raggio $r = \frac{1}{2}$ $A(D) = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}$!

Esercizi

12.19. Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int_T (x+y)dxdy$ 2. $\int_T x^2 dxdy$ 3. $\int_T (x^2+y)dxdy$

dove T è il dominio delimitato dalle rette $y + 2x = 0$, $y + 2x = 1$ e dalle parabole $y = x^2$ e $y = x^2 + 1$.



T è la regione in giallo!

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = v - 2u \end{cases} \swarrow \Psi$$

$$J\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det J\psi = 1 .$$

$$T := \left\{ (u,v) : \ 0 < v < 1 \ ; -1+\sqrt{v} < u < -1+\sqrt{v+1} \right\}$$

$$\begin{cases} y = u^2 \\ y + 2u = v \end{cases} \Rightarrow \quad u^2 + 2u = v \ \Rightarrow u = -1 + \sqrt{v+1}$$

$$\begin{cases} y = u^2+1 \\ y + 2u = v \end{cases} \Rightarrow \quad u^2 + 2u + 1 = v$$

$$u = -1 + \sqrt{v}$$

$$\int_D (v-u) \, du \, dv =$$

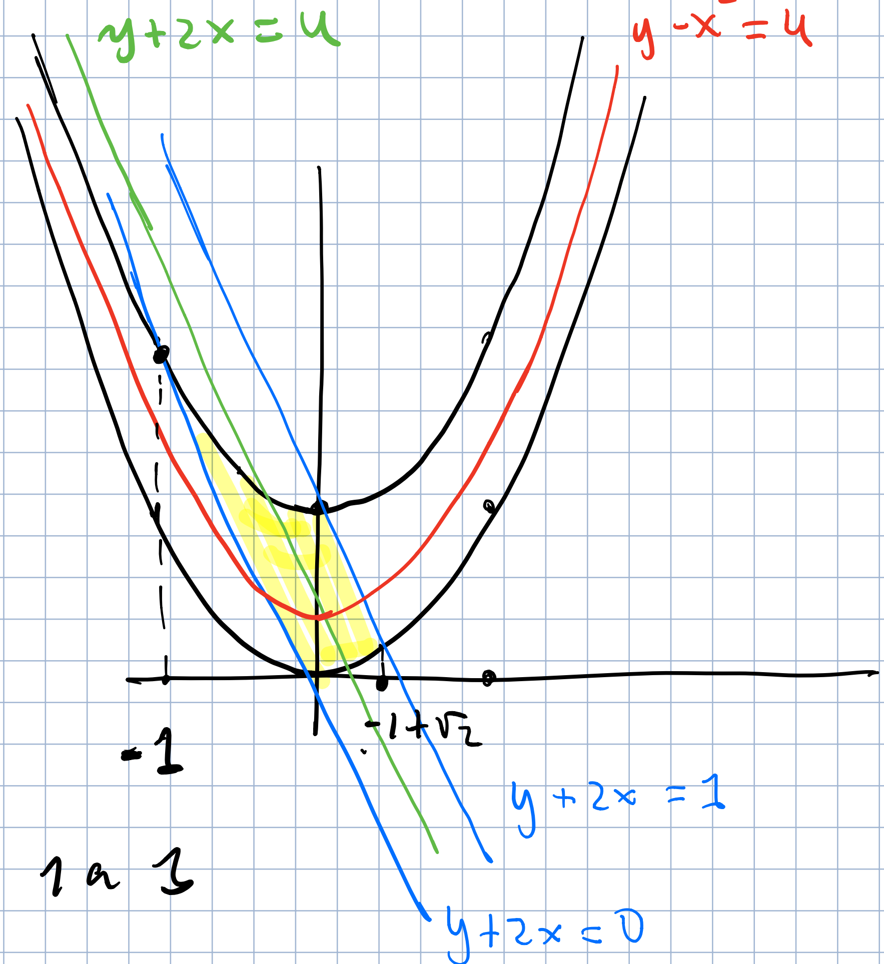
$$\int_0^1 dv \int_{-1+\sqrt{v}}^{-1+\sqrt{v+1}} (v-u) \, du = \int_0^1 v \left(\sqrt{v+1} - \sqrt{2} \right) - \frac{1}{2} \left[u^2 \right]_{-1+\sqrt{v}}^{-1+\sqrt{v+1}}$$

$$= \int_0^1 \left[v \left(\sqrt{v+1} - \sqrt{v} \right) - \frac{1}{2} \left[\left(-1+\sqrt{v+1}\right)^2 - \left(-1+\sqrt{v}\right)^2 \right] \right] dv$$

$$= \int_0^1 v\sqrt{v+1} - v\sqrt{v} - \frac{1}{2}\left[1 + v+1 - 2\sqrt{v+1} - \left(1+v-2\sqrt{v}\right)\right]$$

$$= \int_0^1 \left[v\sqrt{v+1} - v\sqrt{v} - \frac{1}{2} - \left(\sqrt{v+1} - \sqrt{2v}\right)\right] dv$$

$=$ si fa!



Proviamo

$$\psi^{-1} \begin{cases} u = y - x^2 \\ v = y + 2x \end{cases}$$

Dal disegno si intuisce che la mappa è 1 a 1 nel dominio in questione (la retta verde e la parabola rossa si intersecano in un punto del dominio!)