Secondo esonero AM120

Parte 1. Definizioni, esempi, enunciati, brevi dimostrazioni (24 punti)

1.[16 punti] Posto $P = \{(0, 1/4], (1/4, 5/8], (5/8, 1)\}$ e

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < x < 1/2 \\ 1/2 & \text{if } 1/2 \leq x < 3/4 \\ 2 & \text{if } 3/4 \leq x < 1 \end{cases} ,$$

calcolare $\underline{S}_f(P)$ e $\overline{S}_f(P)$. Dimostrare che $f(x) \in \mathcal{R}(0, 1)$.

2.[8 punti] Scrivere, enunciando le ipotesi necessarie, la formula di Taylor all'ordine n con resto di Peano. Dimostrare che dati comunque $a, b > 0$ si ha che $x^a o(x^b) = o(x^{a+b})$ vicino a $x_0 = 0$.

Parte 2. Esercizi (76 punti)

1.[16 punti] Determinare il polinomio di Taylor all'ordine 5 in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{(2x - e^{2x} + 1)^2}{x + \ln(1 + x^2) + \cos(2x^4) - 1}$$

2.[14 punti] Disegnare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{1 + x^2}$$

3.[14 punti] Calcolare l'area della regione del piano

$$\mathcal{C} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } \quad |x| \leq 1 , \quad |x| \ln(1 + x^2) \leq y \leq \ln(2) + \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

4.[18 punti] Dire se la funzione

$$f(x) := \frac{x - \pi/4}{(\sqrt{2} - 2\cos(x))^{3/2}}$$

é integrabile in senso improprio in $(\pi/4, \pi/3)$. Determinare $g(x) > 0$ tale che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to \pi/4$.

5.[14 punti] Dire per quali $p \in \mathbb{R}$ é ben definito l'integrale improprio

$$G(p) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx ,$$

calcolare $G(2)$.

Soluzioni degli esercizi.

NB. il compito era piuttosto lungo, e in particolare l'esercizio 2. era difficile (avevo sbagliato a trascrivere il segno) ovviamente terro' conto di questo nella correzione.

Esercizio 1.

$$f(x) = \frac{(2x - e^{2x} + 1)^2}{x + \ln(1 + x^2) + \cos(2x^4) - 1} = \frac{(\frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4))^2}{x + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)} =$$

$$= \frac{x^4(2 + \frac{4x}{3} + \frac{2x^2}{3} + o(x^2))^2}{x(1 + x + o(x^3))} = x^3(2 + \frac{4x}{3} + \frac{2x^2}{3})^2(1 - x + x^2) + o(x^5)$$

$$= x^3(4 + \frac{16x}{3} + \frac{16x^2}{9} + \frac{8x^2}{3})(1 - x + x^2) + o(x^5)$$

$$= x^3(4 + \frac{16x}{3} + \frac{40x^2}{9} - 4x - \frac{16x^2}{3} + 4x^2) + o(x^5) = 4x^3 - \frac{4x^4}{3} + \frac{28x^5}{9}$$

Esercizio 2.

$f(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)e^{-\frac{3}{2}x^2} - 1}{x^2+1} =$

é pari, definita dovunque e sempre negativa dato che

$$-\frac{3}{2}x^2 + \ln(1 + x^2) \leq -\frac{3}{2}x^2 + x^2$$

D'altro canto $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Guardo le derivate.

$$f'(x) = x(-3e^{-\frac{3}{2}x^2} + \frac{2}{(1 + x^2)^2}), \quad f''(x) = (3x^2 - 1)(3e^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{2}{(1 + x^2)^3})$$

quindi $x = 0$ é un punto di massimo e se in un punto $x_0 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ si ha $f'(x_0) = 0$ automaticamente

$$f''(x_0) = (3x_0^2 - 1)(3e^{-\frac{3}{2}x_0^2} - \frac{2}{(1 + x_0^2)^3}) = 2(3x_0^2 - 1)(\frac{1}{(1 + x_0^2)^2} - \frac{1}{(1 + x_0^2)^3}) > 0$$

cioé x_0 é un minimo relatvo. Allo stesso modo un punto critico $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ deve per forza essere un massimo relativo. quindi per $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ci possono essere solo punti di minimo, mentre in $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ solo punti di massimo. Segue che in $[0, \infty)$ c'e' un unico minimo, mentre il massimo é in $x_0 = 0$.

Esercizio 3.

$$2\int_0^1 (\ln(2) + \sqrt{1 - x^2} - x\ln(1 + x^2))dx = 2\ln(2) + \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \ln(1 + y)dy$$

$$= 2\ln(2) + \frac{\pi}{2} - [(1+y)\ln(1+y) - y] = \frac{\pi}{2} + 1$$

Esercizio 4.

Noto che $\sqrt{2} - 2\cos(x) > 0$ in $(\pi/4, \pi/3)$ e si annulla in $\pi/4$. Faccio lo sviluppo di Taylor al prim'ordine ottenendo

$$\sqrt{2} - 2\cos(x) = 0 + 2\sin(\pi/4)(x - \pi/4) + o(x - \pi/4) = \sqrt{2}(x - \pi/4) + o(x - \pi/4)$$

quindi

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}(x - \pi/4)}}$$

e $f(x)$ é integrabile in senso improprio.

Esercizio 5.

All'infinito non ho nessun problema dato che $\forall p \; x^p e^{-x} < x^{-2}$ per tutti gli x sufficientemente grandi. In $x = 0$ $x^p e^{-x} \sim x^p$ (dato che $e^{-x} \sim 1$) quindi ho integrabilitá per $p > -1$.
Per p naturali si ha integrando per parti

$$G(p) = -\lim_{\beta \to \infty} [x^p e^{-x}]_0^\beta + pG(p-1) = p!$$

quindi $G(2) = 2$.