Esercitazione 1- forme

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Sia $\omega : A \subset \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$ la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y,z) = \left\{\frac{2xz}{x^2+y^2} + y^2e^z\right\} dx + \left\{\frac{2yz}{x^2+y^2} + 2xye^z\right\} dy + \left\{\log(x^2+y^2) + xy^2e^z\right\} dz$$

sul dominio $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0)\}$.
Si calcoli l'integrale di ω lungo la curva γ definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega := -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{z}{z^2+y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2+y^2}dz$$

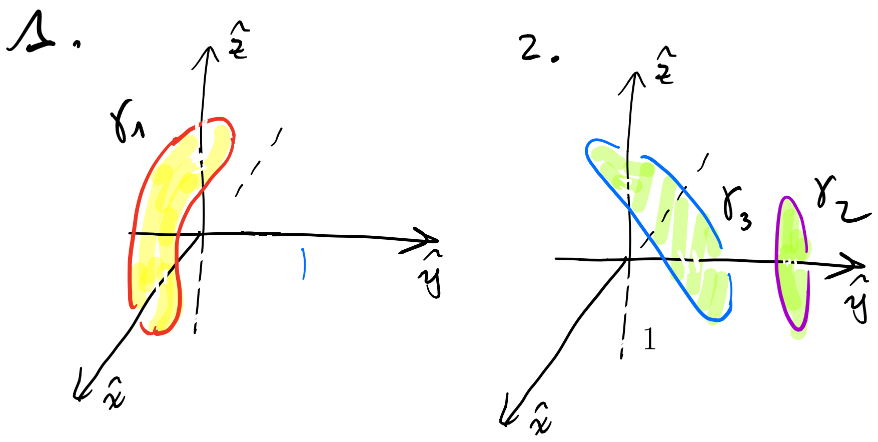
Si determini il dominio massimale di definizione di ω. Si calcoli l'integrale di ω sulla circonferenza

$$x^2 + y^2 = 1\,, \quad z = 1$$

Si dica se ω è chiusa e se è esatta sul suo dominio di definizione massimale.
Si dica se ω è esatta nel cubo

$$1 \le x \le 2\,, \quad 0 \le y \le 1\,, \quad 1 \le z \le 2$$

in caso affermativo determinare una primitiva.
(*) Determinare l'integrale di ω sulle curve in figura. $(\gamma_1, \gamma_2$ e $\gamma_3)$



3. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^3}dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^3}dy$$

definita sul dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

1. Stabilire se ω è chiusa.
2. Stabilire se ω è esatta.
3. Calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di parabola di equazione $y = 1 - x^2$ con punto iniziale $(1,0)$ e punto finale $(0,1)$.

4. Si consideri la forma differenziale ω definita da

$$\omega(x,y) = -\frac{2\cos(2x)}{\sqrt{y-\sin(2x)}}dx + \frac{1}{\sqrt{y-\sin(2x)}}dy.$$

(a) Si determini e si disegni il dominio massimale $D \subset \mathbb{R}^2$ della forma ω.

(b) Si stabilisca se ω sia una forma chiusa e/o una forma esatta sul dominio D.

(c) Si calcoli l'integrale di ω lungo una curva che percorra l'arco della parabola di equazione

$$y = \frac{5}{\pi^2}x^2 + 4$$

dal punto di ascissa $x = 0$ al punto di ascissa $x = \pi$.

5. Sia $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la curva piana

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ 2 - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Disegnare γ.
Si calcoli l'integrale lungo la curva γ delle seguenti forme differenziali:

$$\omega(x,y) = 3x^2 \log y dx + (\frac{x^3}{y} - 1)dy\,,$$

$$\alpha(x,y) = (x + 3x^2\log y)dx + (x + \frac{x^3}{y} - 1)dy.$$

6. Date $\alpha(x) \le \beta(x)$ due funzioni $C^1([a,b],\mathbb{R})$, definiamo

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b\,, \quad \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}\,.$$

Data $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ si considerino le uno forme:

$$\omega_1 = f(x,y)dx\,, \qquad \omega_2 = g(x,y)dy\,.$$

Dimostrare le **Formule di Green- Ostrogradskij**:

$$\int_{\delta D} \omega_1 = -\int_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy\,, \int_{\delta D} \omega_2 = \int_D \frac{\partial g}{\partial x} dxdy$$

NB. la prima è piú facile!