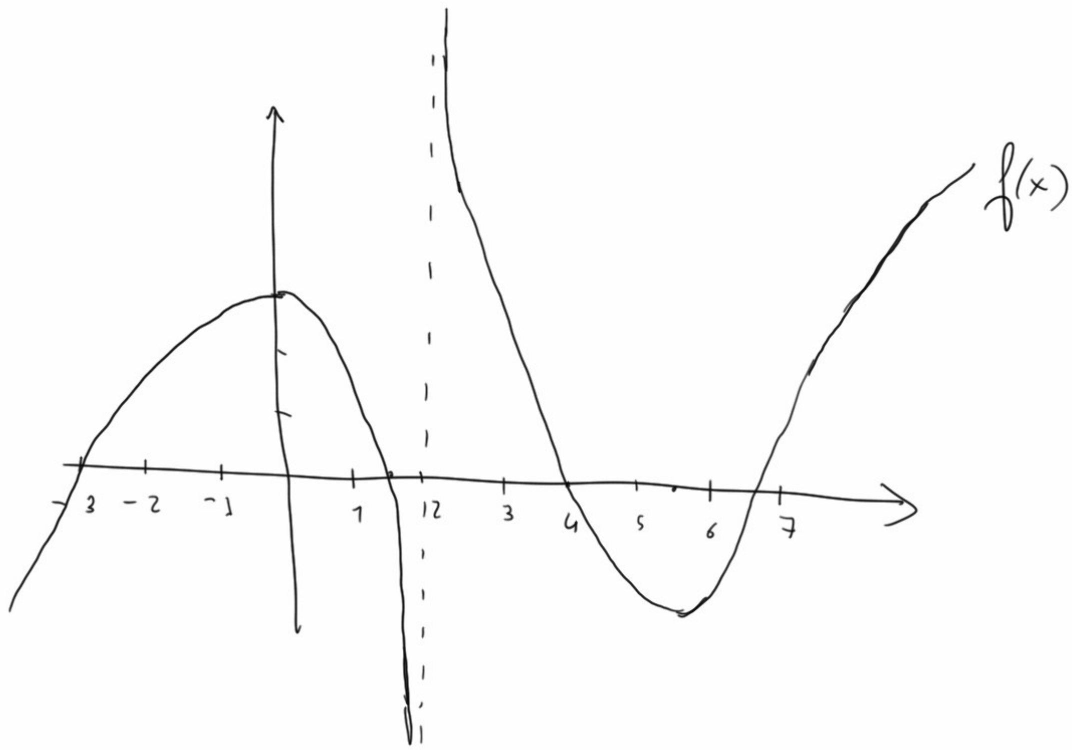
Soluzioni degli esercizi proposti venerdi 7-10

Si consideri la funzione f(x) il cui grafico e' dato dal disegno sotto.



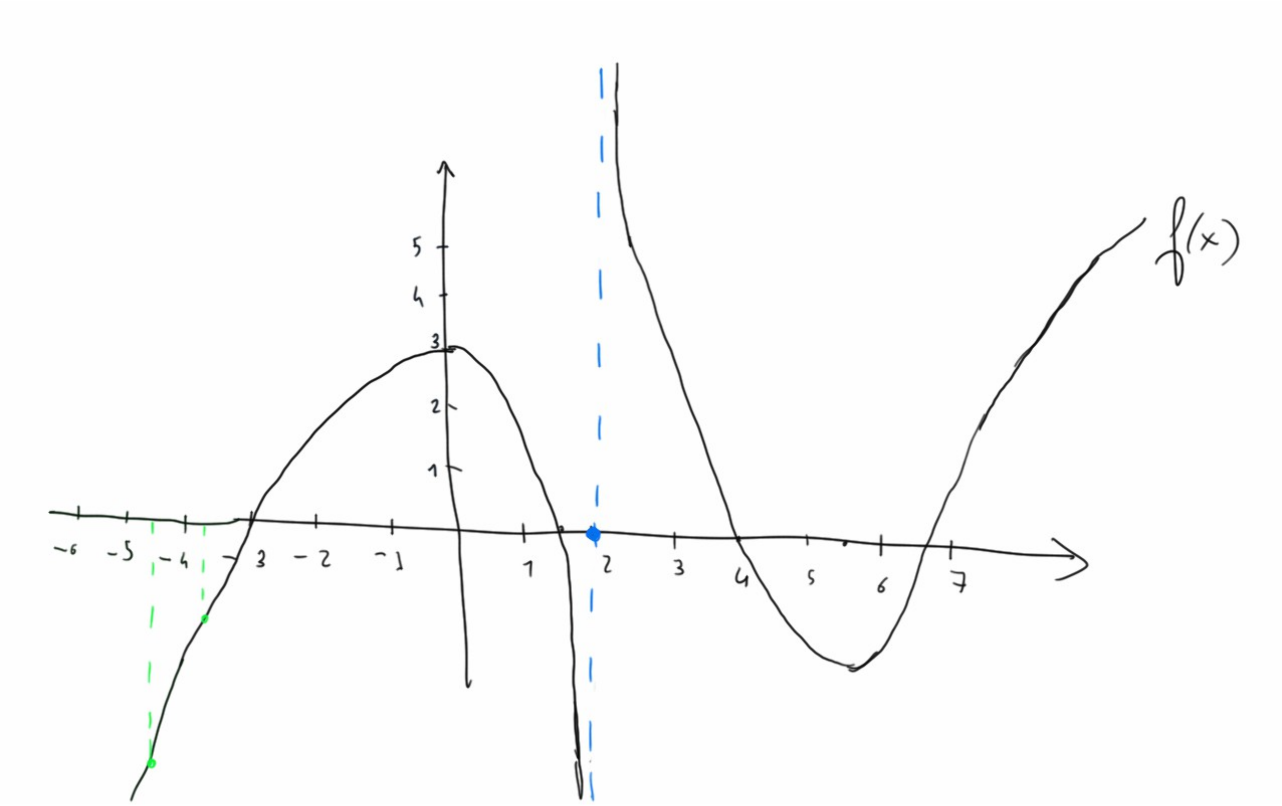
1. determinare il dominio e l'immagine

2.determinare gli x tali che f(x)≤0

3. determinare gli x tali che f(x)≥3

4. La funzione e' iniettiva in [5,5 ,∞) ? E' iniettiva in (-2,1) ?

Il dominio sono quegli x per cui si puo' determinare f(x) dal grafico.



Se si sceglie un qualsiasi valore dell'ascissa diverso da 2, il grafico permette di calcolare f(x) (si traccia la retta verticale per il punto x e si determina l'intersezione col grafico). Al contrario non c'e' nessun valore della funzione corrispondente a x=2 (tracciando la verticale in blu non ci sono intersezioni col grafico)

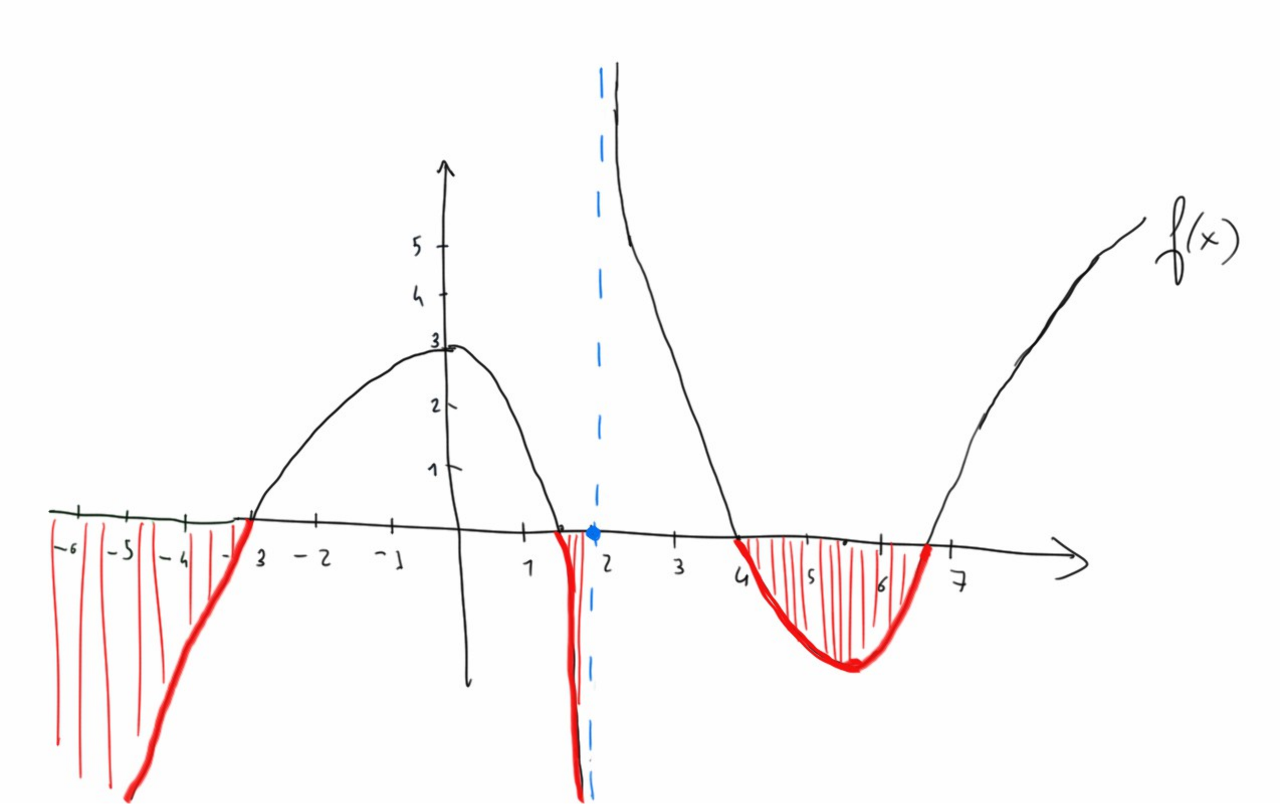
D= R/{2} (tutti gli x reali con x≠2)

Per trovare l'immagine dobbiamo trovare gli y tali che esiste un x per cui f(x)= y.

Si traccia una qualsiasi retta orizzontale e si vede che (per qualsiasi retta) ci sono sempre intersezioni (vedi il disegno per la risposta 4)

l'immagine e' quindi R (**per ogni valore reale di y** esiste x tale che f(x)=y)
Determinare gli x tali che f(x)≤0

Vogliamo trovare gli x tali che **il corrispondente punto sul grafico (x,f(x)) appartiene al semipiano inferiore**



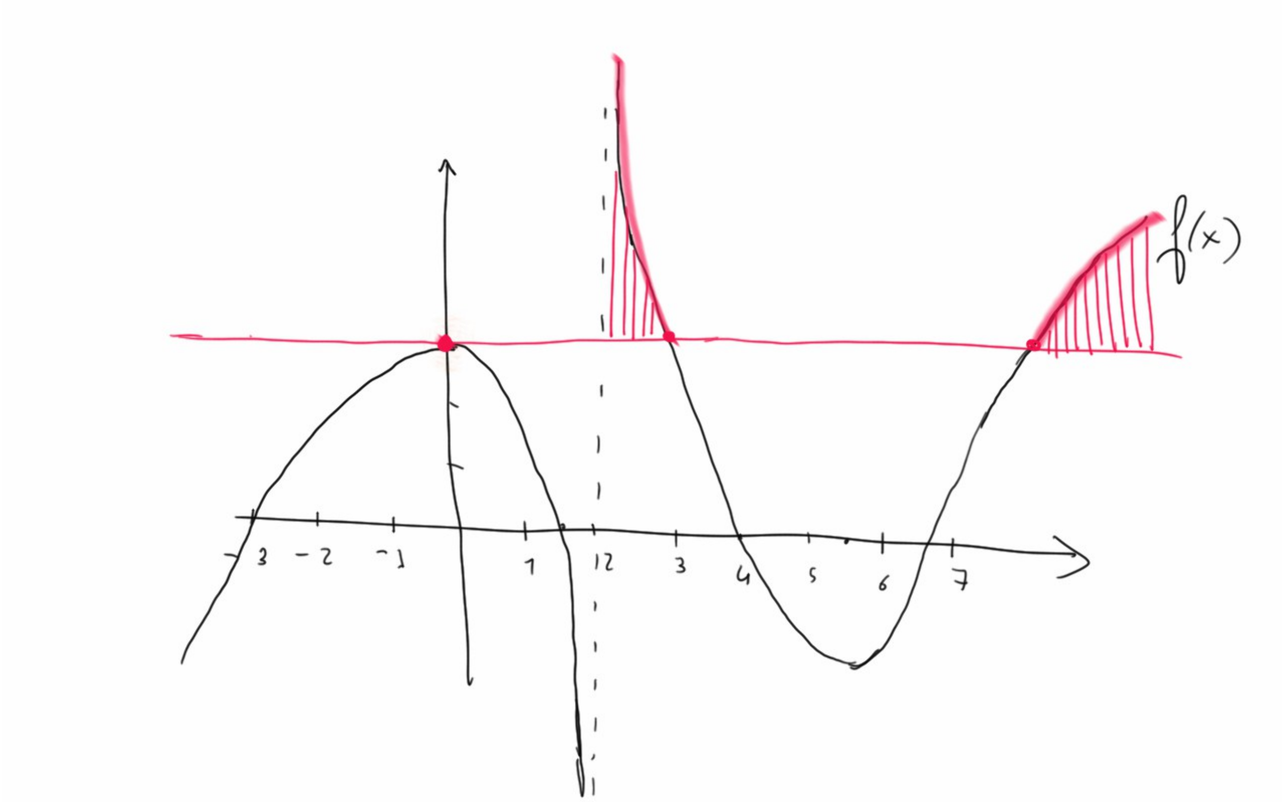
Ecco in rosso segnare le parti del grafico che si trovano nel semipiano inferiore. Le ascisse di tali punti sono le x per cui f(x)<= 0.

risposta: **(-∞ ,-3]** unione **[1,5 ,2)** unione **[4,5]**

si puo' anche dire: $x \leq -3$ unione $1{,}5 \leq x < 2$ unione $4 \leq x \leq 5$

Determinare gli x tali che $f(x) \geq 3$.

Si traccia la retta orizzontale a ordinata y=3. Vogliamo quei valori di x per cui (x,f(x)) si trova nel semipiano $y \geq 3$.

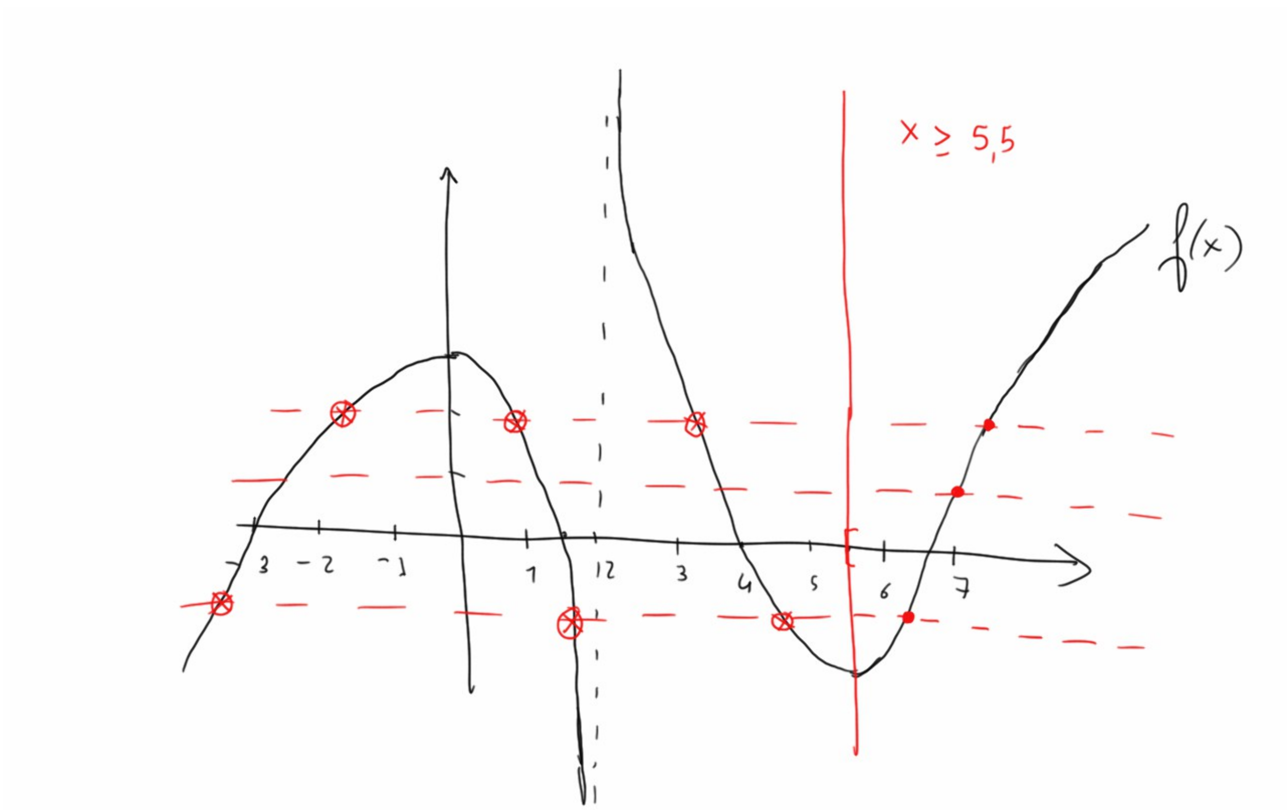


La risposta e' x=0 unione (2,3] unione [8,∞)

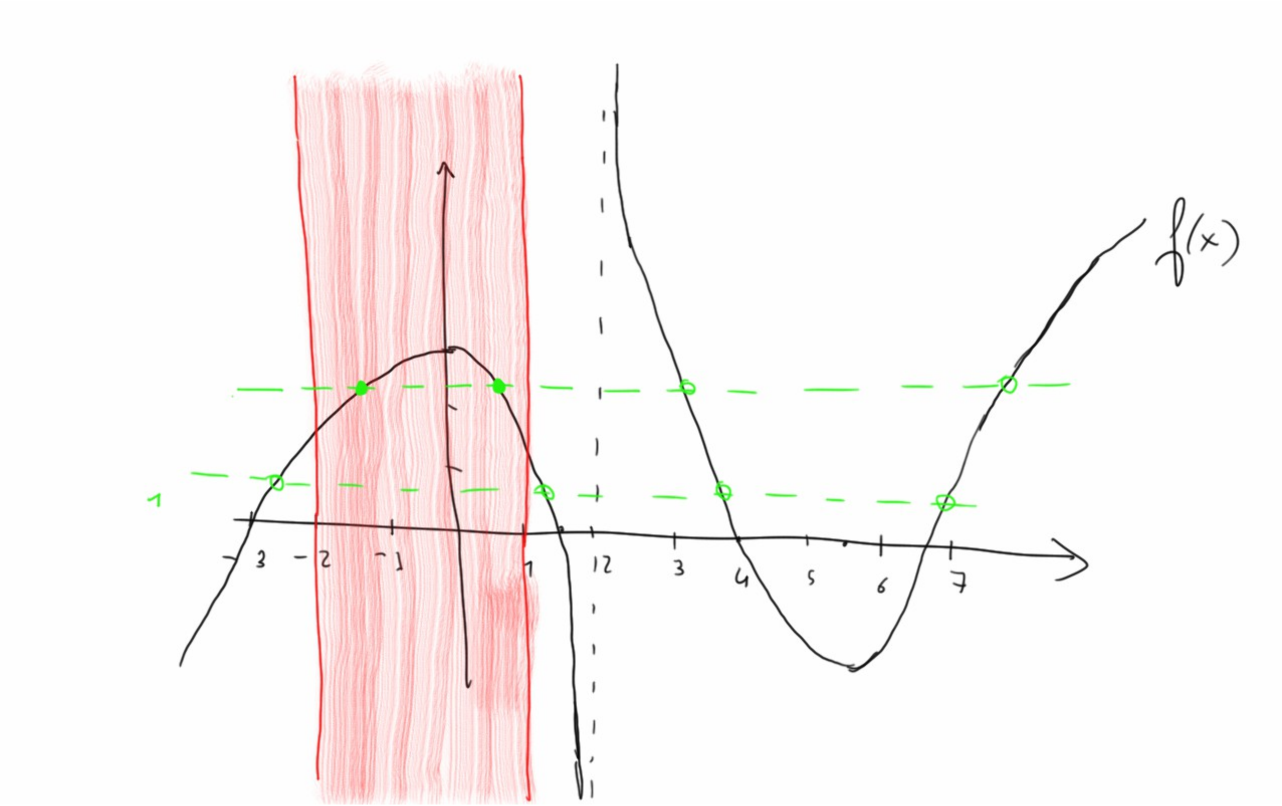
(notare che il valore 8 l'ho dedotto approssimativamente dal grafico)

Determinare se f(x) e' iniettiva in [5,5 ,∞) . Risposta: SI

Si tracciano le rette orizzontali a una qualisasi quota. E' facile vedere che al piu' un punto di intersezione ha ascissa x>= 5,5. Basta notare che ci interessano solo i punti di intersezione che si trovano nel semipiano x>= 5,5 (sono i punti indicati con i pallini rossi pieni).

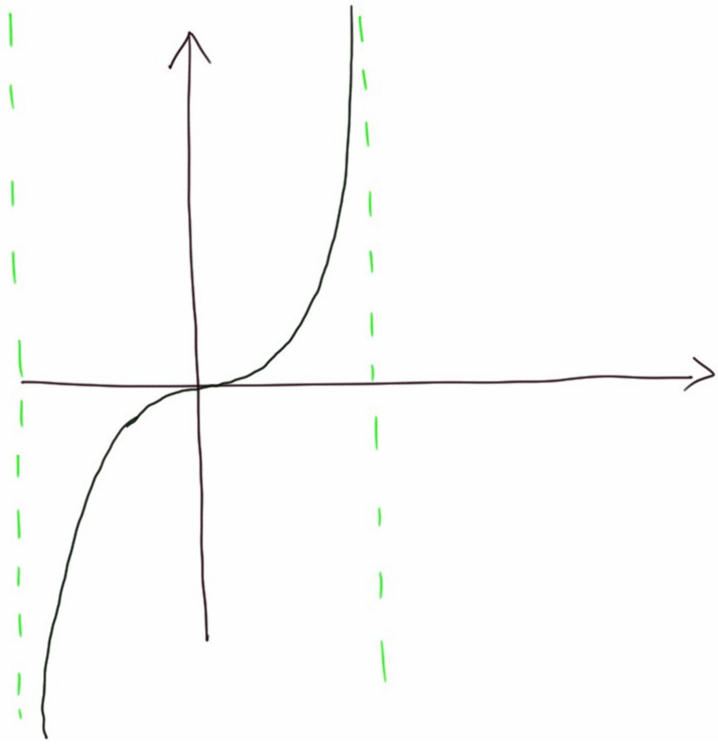


Consideriamo ora l'intervallo [-2,1]. Anche qui, data una retta orizzontale, ci interessano solo i punti del grafico compresi nella regione in rosso (-2≤x≤1).

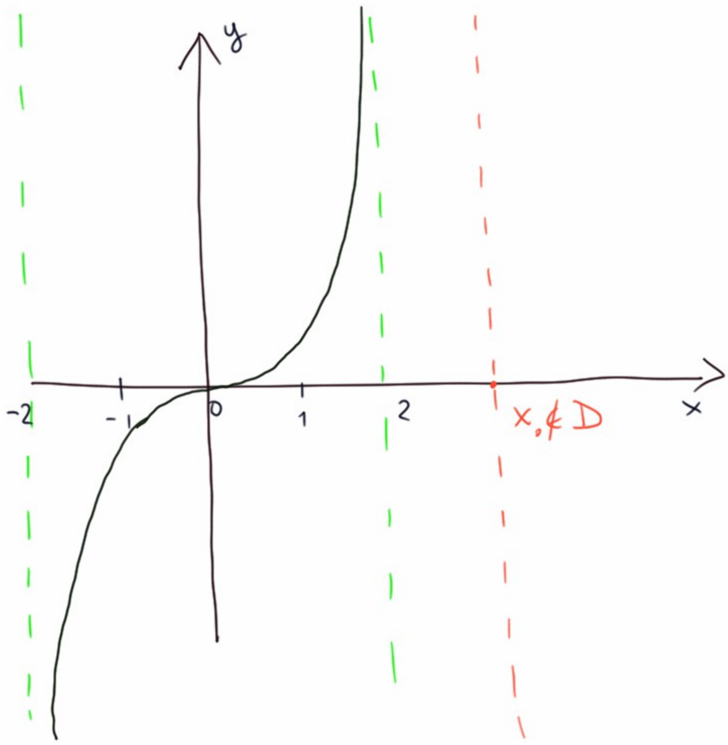


E' evidente che la funzione in questa regione **non e' iniettiva**, infatti la seconda retta (quella piu' in alto) ha due intersezioni nella regione di interesse.

Esercizio 2: Studiare il dominio e l'immagine della funzione rappresentata dal grafico.



Per determinare il dominio trovo i punti cui posso attribuire un valore della funzione tramite il grafico. (devo stabilire una unita' di misura!)

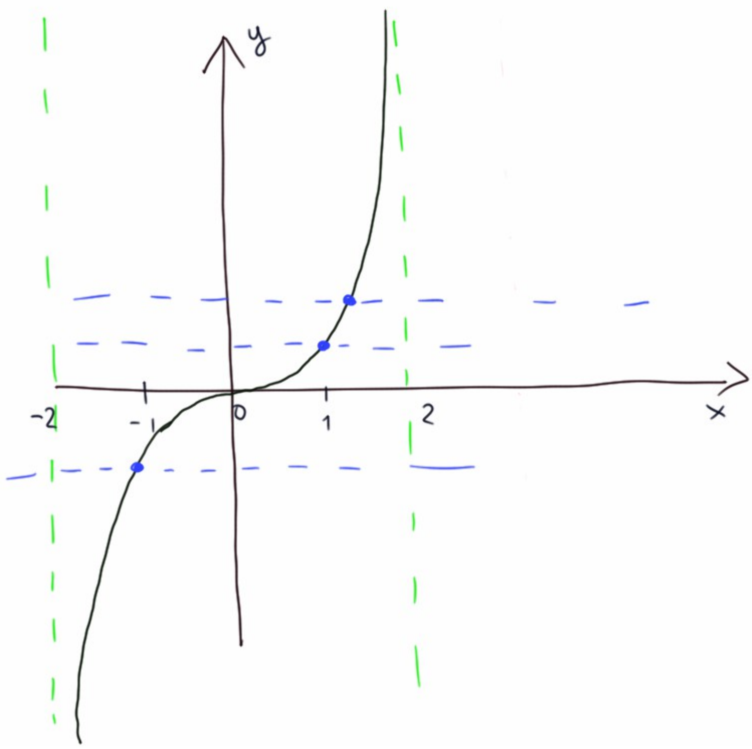


E' evidente che il grafico non mi da nessun valore se x>=2 o x<=-2. Infatti tracciando una retta verticale per un qualsiasi $x_0 \geq 2$ non ho intersezioni col grafico.

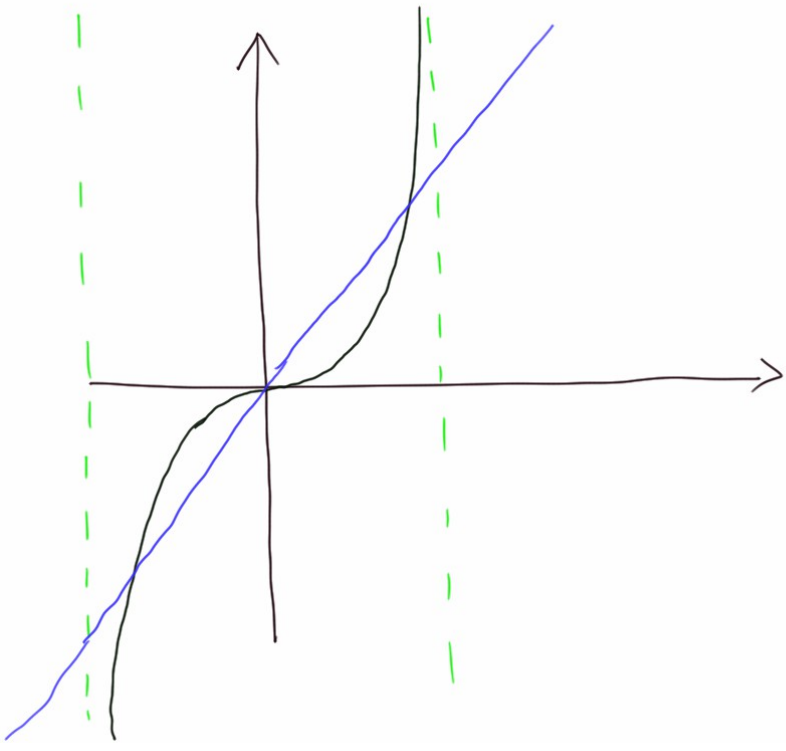
Quindi il dominio e' -2<x<2 .

L'immagine sono tutti i reali inoltre la funzione e' iniettiva e strettamente crescente.

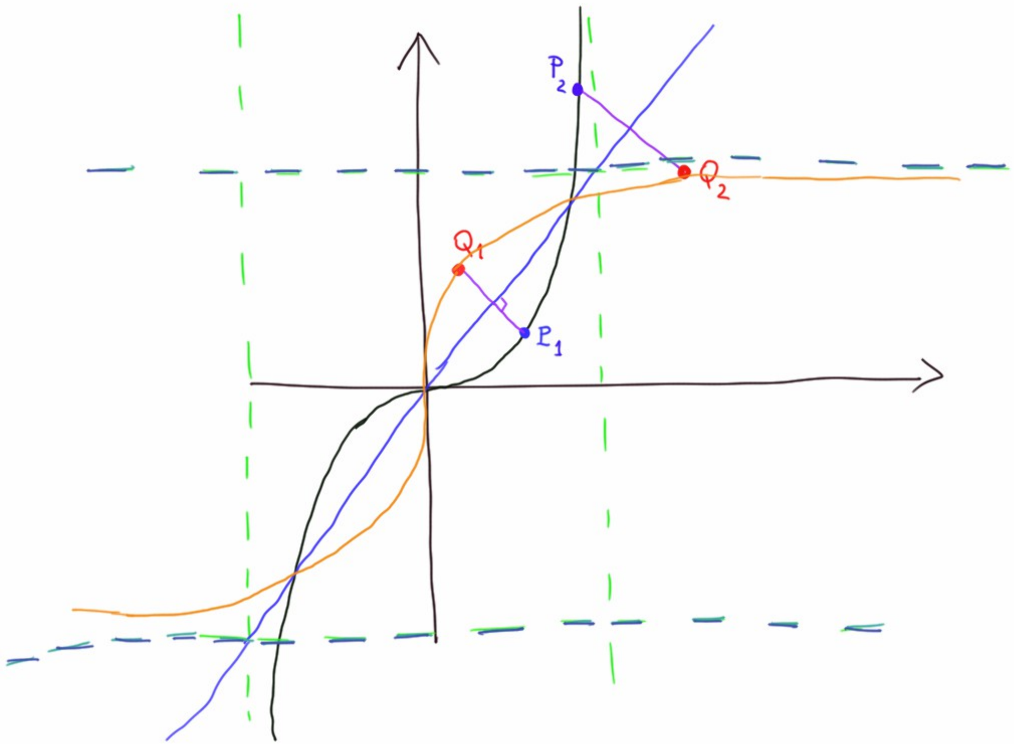
Per l'iniettivita' basta tracciare le rette orizzontali



Per ottenere la funzione inversa (scritta come $f^{(-1)}(x)$, quindi con variabile indipendente x) bisogna fare lo speculare rispetto all'asse y=x



si ottiene la seguente figura (abbiamo segnato esplicitamente lo speculare di due punti sul grafico)

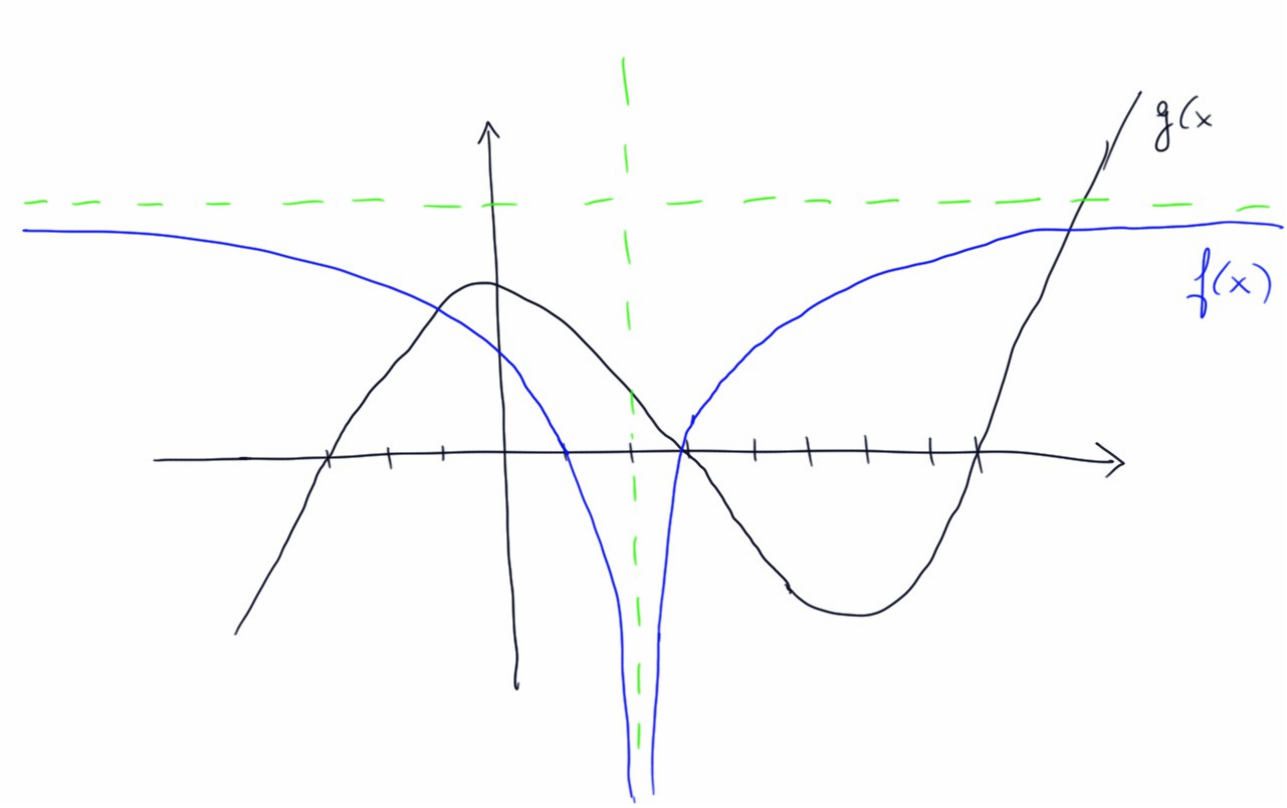


La funzione inversa e' disegnata in giallo.

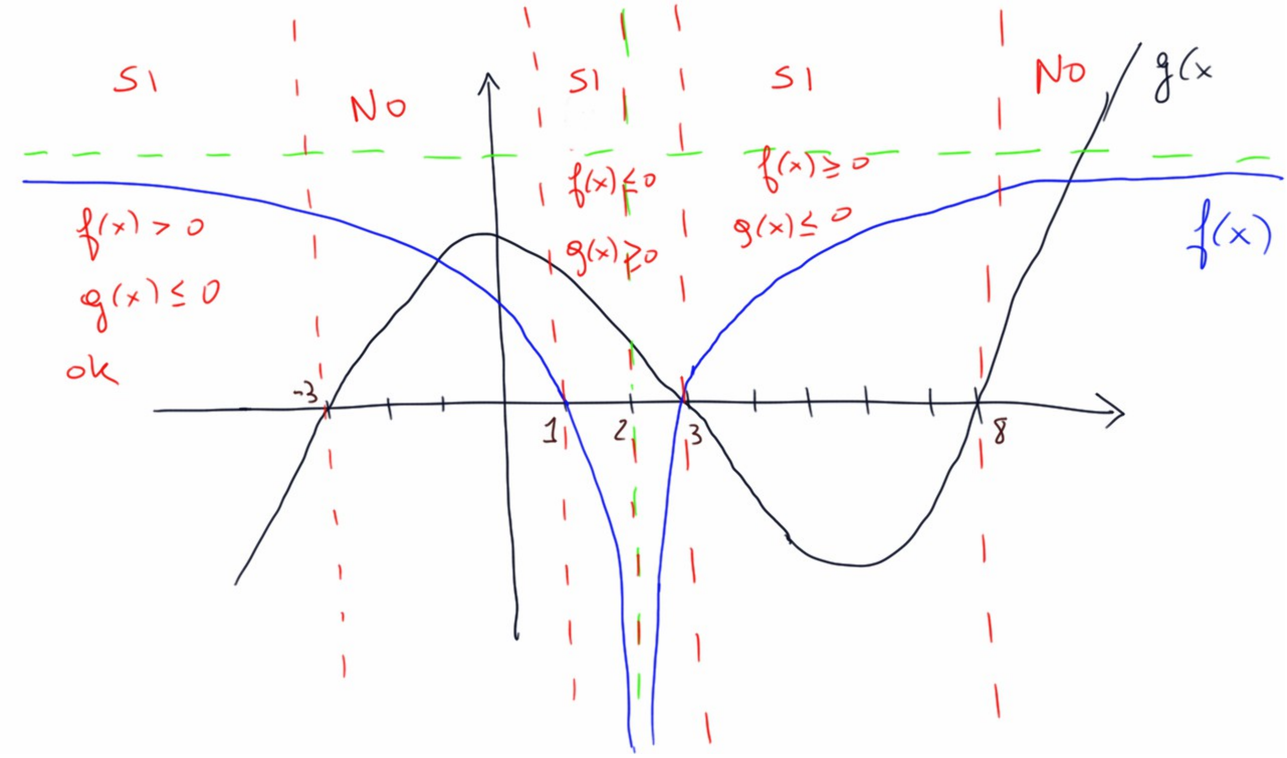
Notare che lo speculare delle rette verticali verdi che delineano il dominio sono le rette orizzontali in blu (che delimitano l'immagine).
Quindi l'immagine di $f^{(-1)}(x)$ e' l'intervallo (-2,2).

Basta disegnare solo la curva in giallo e studiare le intersezioni di tale grafico con le rette orizzontali.

Date le funzioni f(x) e g(x) nel grafico di sotto, determinare gli x tali che $f(x)g(x) \leq 0$



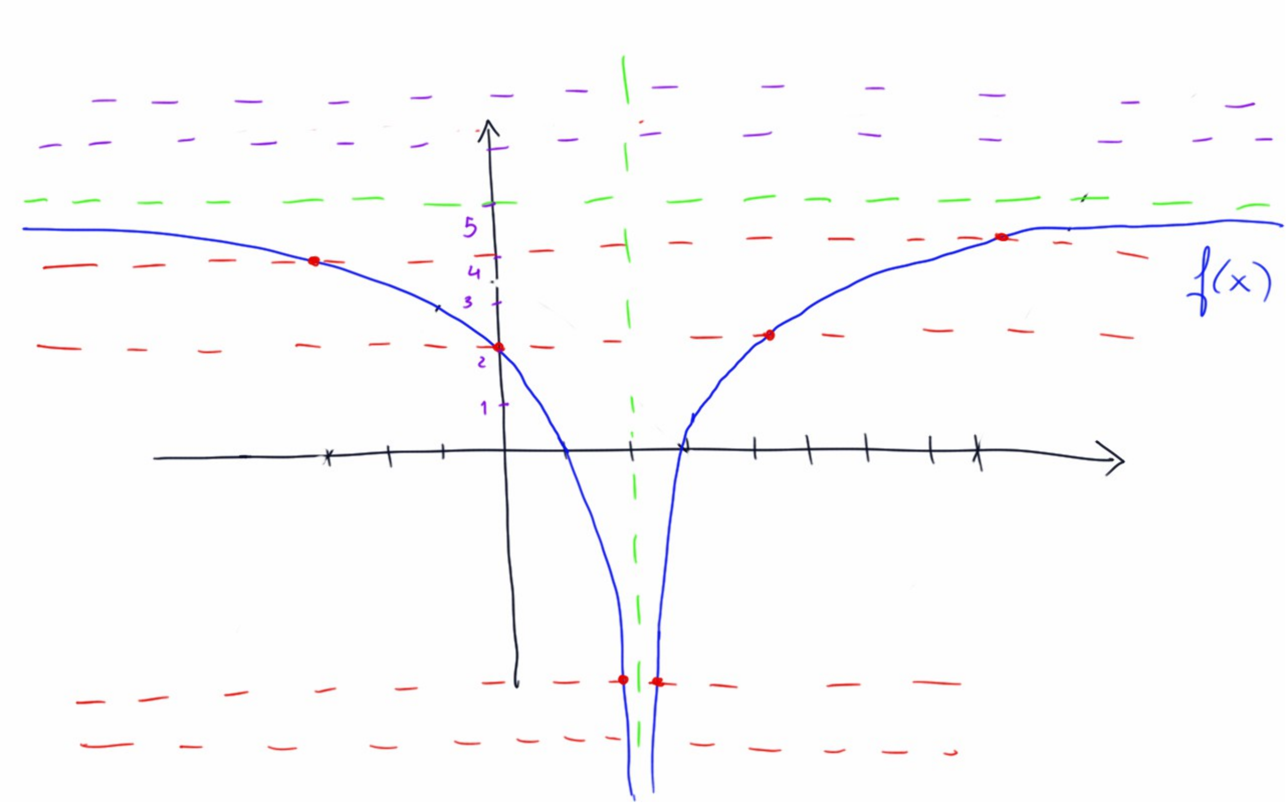
Dobbiamo trovare gli x per cui f(x) e g(x) **NON hanno lo stesso segno.**



Quindi la risposta e' (-∞,-3] unione [1,2) unione (2,8]

studiamo ora l'immagine di f(x).

Al solito tracciamo le rette orizzontali e cerchiamo intersezioni col grafico.



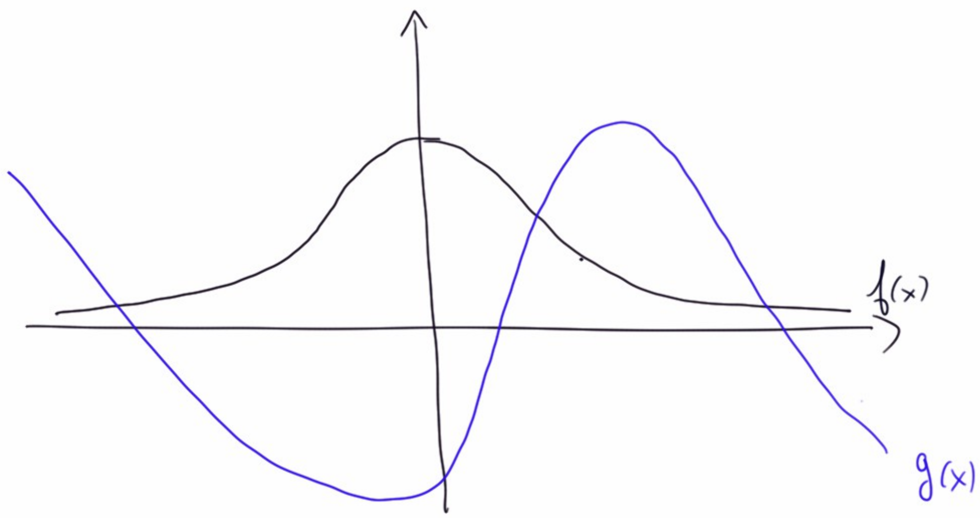
Tutte le rette orizzontali sotto alla retta in verde hanno (due) intersezioni. Tutte le rette orizzontali sopra alla retta in verde NON hanno intersezioni.

L'immagine e' (-∞,5]

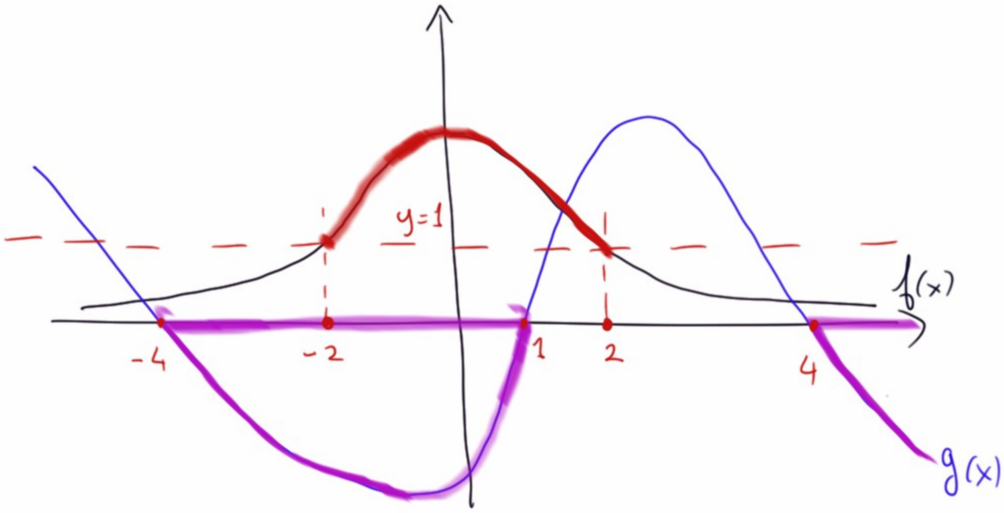
Esercizio 4.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$ dove f(x) e g(x) sono rappresentate dal grafico sottostante



Dobbiamo trovare i punti x per cui e' contemporaneamente vero che f(x)≥ 1 e g(x)< 0.



Ho segnato in viola la parte del grafico di g(x) che appartiene al semipiano inferiore (ed ho segnato in viola anche le corrispondenti ascisse)
Ho segnato in rosso la parte del grafico di f(x) che appartiene al semipiano y≥ 1.

Voglio le x per cui entrambe le condizioni sono verificate.

La regione cercata e' $-2 \leq x < 1$