Esonero AM220, 2019, con Soluzioni

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. Sia

$$S := \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\ \text{tali che } x^2 + y^2 \leq 4\,, z = x^2 + y^2\ \}\,.$$

Sia M il corpo ottenuto distribuendo su S uniformemente la densità di massa superficiale $\rho = 1$. Determinare massa e baricentro di M.

Dato il campo vettoriale $F = (-y, x, x^2 + y^2)$, verificare il teorema del rotore cioè che

$$\int_S \text{rot}(F) \cdot d\sigma = \oint_{\partial S} F \cdot ds$$

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^3} dx + \frac{y}{(x^2 + y^2)^3} dy$$

definita sul dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

1. Stabilire se ω è chiusa.
2. Stabilire se ω è esatta.
3. Calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di parabola di equazione $y = 1 - x^2$ con punto iniziale $(1, 0)$ e punto finale $(0, 1)$.

3. Sia

$$f_n(x) := \frac{nx^2 + x}{n + 1}$$

1. Studiare la convergenza puntuale della successione f_n in $\mathbb{R}$.
2. Studiare la convergenza uniforme della successione f_n in $\mathbb{R}$.
3. Studiare la convergenza uniforme della successione f_n in $[0, 1]$.

4. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione 2π-periodica che vale $x(x^2 - \pi^2)$ nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Che regolarità ha tale funzione?
Scrivere la serie di Fourier della derivata.

Traccia delle Soluzioni

1. Sia

$$S := \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ \text{tali che } x^2 + y^2 \leq 4\,, z = x^2 + y^2\ \}\,.$$

Sia M il corpo ottenuto distribuendo su S uniformemente la densità di massa superficiale $\rho = 1$. Determinare massa e baricentro di M.

Dato il campo vettoriale $F = (-y, x, x^2 + y^2)$, verificare il teorema del rotore cioè che

$$\int_S \operatorname{rot}(F) \cdot d\sigma = \oint_{\partial S} F \cdot ds$$

Soluzione: La superficie in questione è un tronco di paraboloide. Possiamo parametrizzarlo come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r^2 \end{pmatrix}\,, \quad r \in [0,2]\,, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

che ha come vettore normale

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\theta \\ -2r^2\sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

che è diretto verso le z positive.
Per calcolare la massa di M, dobbiamo calcolare

$$\int_S \rho d\sigma = \int_0^2 \sqrt{4r^4 + r^2} dr \int_0^{2\pi} = \pi \int_0^4 \sqrt{4y + 1} dy = \frac{\pi}{6}(-1 + 17\sqrt{17})$$

Per quanto riguarda il baricentro, per simmetria si vede facilmente che $x_B = y_B = 0$, mentre per per calcolare la componente z

$$\int_S z\rho d\sigma = \int_0^2 r^2\sqrt{4r^4 + r^2} dr \int_0^{2\pi} = \pi \int_0^4 y\sqrt{4y + 1} dy = \frac{\pi}{16}\int_1^5 (z - 1)\sqrt{z} dz$$

Il bordo di S è la circonferenza

$$x^2 + y^2 = 4\,, \quad z = 4$$

che possiamo parametrizzare come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin\theta \\ 2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

in modo che rispetto all'asse z la circonferenza sia percorsa in verso antiorario. Calcoliamo il lavoro

$$\oint_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F \cdot \vec{v} d\theta = \int_0^{2\pi} 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) d\theta = 8\pi$$

Calcoliamo il rotore

$$\mathrm{rot}(F) = (2y, -2x, 2)$$

e il suo flusso attraverso S:

$$\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot d\sigma = \int_0^2 2r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi$$

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^3} dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^3} dy$$

definita sul dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

1. Stabilire se ω è chiusa.
2. Stabilire se ω è esatta.
3. Calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di parabola di equazione $y = 1 - x^2$ con punto iniziale $(1,0)$ e punto finale $(0,1)$.

Soluzione: 1. Per verificare che ω sia chiusa basta calcolare le derivate

$$\frac{d}{dy}\frac{x}{(x^2+y^2)^3} = -\frac{6xy}{(x^2+y^2)^4} = \frac{d}{dx}\frac{y}{(x^2+y^2)^3} \, .$$

2. Il dominio D non è semplicemente connesso, quindi il fatto che ω sia chiusa NON implica che sia esatta. D'altro canto è evidente che

$$f(x,y) = \frac{1}{2(x^2+y^2)^2}$$

è una primitiva definita sul dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Quindi ω è esatta. Questo si poteva anche verificare calcolando (qui γ é la circonferenza unitaria)

$$\int_\gamma \omega ds = \int_0^{2\pi} d\theta(-\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) = 0 \, .$$

3. Poiché ω è esatta, il lavoro si calcola come $f(0,1) - f(1,0) = 0$.

3. Sia

$$f_n(x) := \frac{nx^2 + x}{n+1}$$

1. Studiare la convergenza puntuale della successione f_n in $\mathbb{R}$.
2. Studiare la convergenza uniforme della successione f_n in $\mathbb{R}$.
3. Studiare la convergenza uniforme della successione f_n in $[0,1]$.

Soluzione:

1. $f_n(x)$ converge puntualmente alla funzione $f(x) = x^2$, infatti:

$$|\frac{nx^2 + x}{n+1} - x^2| = \frac{|x - x^2|}{n+1}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |\frac{nx^2 + x}{n+1} - x^2| = 0$$

2. D'altro canto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x - x^2| = \infty$$

(NB. non si deve fare il sup della funzione $x - x^2$ ma del suo modulo!) quindi la successione non converge uniformemente in $\mathbb{R}$

3. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |\frac{nx^2 + x}{n+1} - x^2| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sup_{x\in[0,1]} |x - x^2|}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(n+1)} = 0$$

4. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione 2π-periodica che vale $x(x^2 - \pi^2)$ nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Che regolarità ha tale funzione? Scrivere la serie di Fourier della derivata.

Soluzione: La funzione $f(x) = x(x^2 - \pi^2)$ è dispari e vale $f(\pi) = -f(-\pi) = 0$. Quindi la funzione in questione è continua con derivata continua. La derivata seconda cioè la funzione 2π-periodica che vale $6x$ nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ invece non è continua dato che $f''(\pi) \neq f''(-\pi)$.

Calcoliamo la serie di Fourier (dato che è dispari servono solo i coefficienti b_n). Procediamo per parti:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(x^2 - \pi^2) \sin(nx) dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 - \pi^2) \cos(nx) dx \\ &= -\frac{6}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{12(-1)^n}{n^3} \end{aligned}$$

La derivata è una funzione continua, quindi la sua serie di Fourier converge uniformemente. Quindi la serie di Fourier della derivata è data dalla derivata (termine a termine) della serie di Fourier:

$$f'(x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$