

Primo esonero di AM210/Analisi Matematica II, 10-11-2016

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. (10 punti) Trovare tutti i punti in cui è continua/differenziabile la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y(e^{x^3} - 1 - x^3)}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Domanda in piú: Le derivate seconde in $(x, y) = (0, 0)$ sono continue? e le derivate terze?

2. (10 punti) Dire se la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^{10}}{x - y^4} & \text{se } x \neq y^4 \\ 0 & \text{se } x = y^4 \end{cases}$$

è continua in $(x, y) = (0, 0)$

3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x, y) = xy^3 - yx^3,$$

trovarne i punti stazionari e discuterne la natura (non c'è bisogno di usare l'hessiano).

3. Esercizio supplementare da svolgere solo dopo aver svolto gli altri.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positivamente omogenea di grado $\alpha > 0$. Dimostrare che se

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi)} |f(\sin(\theta), \cos(\theta))| = +\infty$$

allora la funzione non è continua in $(0, 0)$.