Prova Primo esonero di AM210/Analisi Matematica II, 6-11-2018

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. (10 punti) Trovare tutti i punti in cui è continua/differenziabile la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y(\cos(x) - \cos(y))}{|x| + |y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol: per $x \neq 0$ e $y \neq 0$ la funzione è il rapporto di due funzioni C^∞ in cui il denominatore non si annulla, quindi è C^∞. In $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ la funzione è continua (rapporto di due funzioni continue in cui il denominatore non si annulla). D'altro canto in tali punti la funzione non è derivabile rispetto alla variabile x (la derivata da destra e da sinistra non coincidono) quindi non puó essere differenziabile.

Per $(x,y) = (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(\cos(x) - \cos(y))}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x^2 - y^2)}{|x| + |y|} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(o(x^2 + y^2))}{|x| + |y|} = 0$$

(REM: dato che $x^2 + y^2 > x^2$ si ha che $o(x^2) = o(x^2 + y^2)$)

Calcoliamo le derivate parziali. Dato che $f(x,0) = 0$ si ha $\partial_x f(0,0) = 0$. Inoltre

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(y,0) - f(0,0)|}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y(1 - \cos(y))}{y|y|} = 0\,.$$

Calcolo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(\cos(x) - \cos(y))}{(|x| + |y|)\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x^2 - y^2 + o(x^2 + y^2))}{(|x| + |y|)\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y(x^2 + y^2)}{(|x| + |y|)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

La funzione è differenziabile.

2. (10 punti) Dire se la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^2 x^3}{x^2 + y^3} & \text{se } x^2 \neq -y^3 \\ 0 & \text{se } x^2 = -y^3 \end{cases}$$

è continua in $(x,y) = (0,0)$.

SOL. Non è continua. Il limite lungo la curva

$$x = t + t^{100} = t(1 + o(1)) , \quad y = -t^{2/3}$$

è

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t^{4/3} t^3 (1 + o(1))^3}{t^2 + 2t^{101} + t^{1000} - t^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{4/3+3}}{2t^{101}} = \infty.$$

L'idea è che quando $x^2 = -y^3$ il denominatore si annulla mentre il numeratore è circa $x^{4/3+3}$ quindi cerco una curva che passi per $(0, 0)$ e sia molto vicina a $x^2 = -y^3$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. La scelta

$$x = t + t^{100} = t(1 + o(1)) , \quad y = -t^{2/3}$$

è piuttosto arbitraria, l'idea è che t^{100} è piccolissimo rispetto a t quando $t \to 0$.

3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - xy$$

trovarne i punti stazionari e discuterne la natura.

$$\partial_y f = y^2 - x = 0 , \quad \partial_x f = -x - y = 0$$

cioé $x = y = 0$ e $x = 1, y = -1$.

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix}$$

quindi

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad H(1, -1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

in $(0, 0)$ il determinante vale $\det(H) = -1$ quindi abbiamo due autovalori con segni opposti . Quindi $(0, 0)$ è una sella. D'altro canto in $(1, -1)$ si ha $\det(H) = 1$ e $\mathrm{tr}(H) = -3$ quindi abbiamo due autovalori negativi. Quindi $(1, -1)$ è un massimo.

3. Altro esercizio sui punti max e minimi (un po più difficile):

$$f(x, y) = x^5 - x^4 y$$

SOL calcolo i punti critici

$$\partial_x f = 5x^4 - 4x^3 y , \quad \partial_y f = -x^4$$

ogni punto della forma $(0, y_0)$ è critico (tutto l'asse y).

Noto che

$$f(x, y) = x^4(x - y)$$

quindi il primo fattore è sempre positivo. Riguardo al secondo fattore , se $y_0 > 0$ il termine $x - y < 0$ per ogni (x, y) nella palla di raggio $y_0/4$ e centro $(0, y_0)$. Allo stesso modo se $y_0 < 0$ il termine $x - y > 0$ per ogni (x, y) nella palla di raggio $y_0/4$ e centro $(0, y_0)$. Quindi in conclusione se $(0, y_0)$ è un massimo (non stretto) se $y_0 > 0$ e un minimo se $y_0 < 0$. Infine se $y_0 = 0$ non ho ne un massimo ne un minimo, infatti nel semipiano $x > y$ è positiva e in $x < y$ è negativa.