Alcuni esercizi meditativi
AM210/Analisi Matematica II, 8-11-2018

(alcuni esercizi possibilmente un po piú complicati ma che possono essere interessanti)

1. Trovare tutti i punti in cui è continua/differenziabile la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(\cos(x)-1)y}{x^2+y^6} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. (teorico) Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ una funzione omogenea di grado $\alpha > 0$ tale che

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi)} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \infty$$

dimostrare che f non può essere estesa per continuità in $(0,0)$

3. Dire in quali punti le equazioni

$$\begin{cases} u + v = x + y \\ xu + yv = 1 \end{cases}$$

definiscono localmente due funzioni $u = g_1(x,y)$, $v = g_2(x,y)$.

4. Siano

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy + 2\,, \quad H(x,y) = x^2 + y^2$$

Dimostrare che $f(x,y) = 0$ può essere esplicitata localmente come $y = g(x)$ in un intorno di $(x_0, y_0) = (1,1)$.
Posto $h(x) = H(x, g(x))$, calcolare $h'(x_0)$.