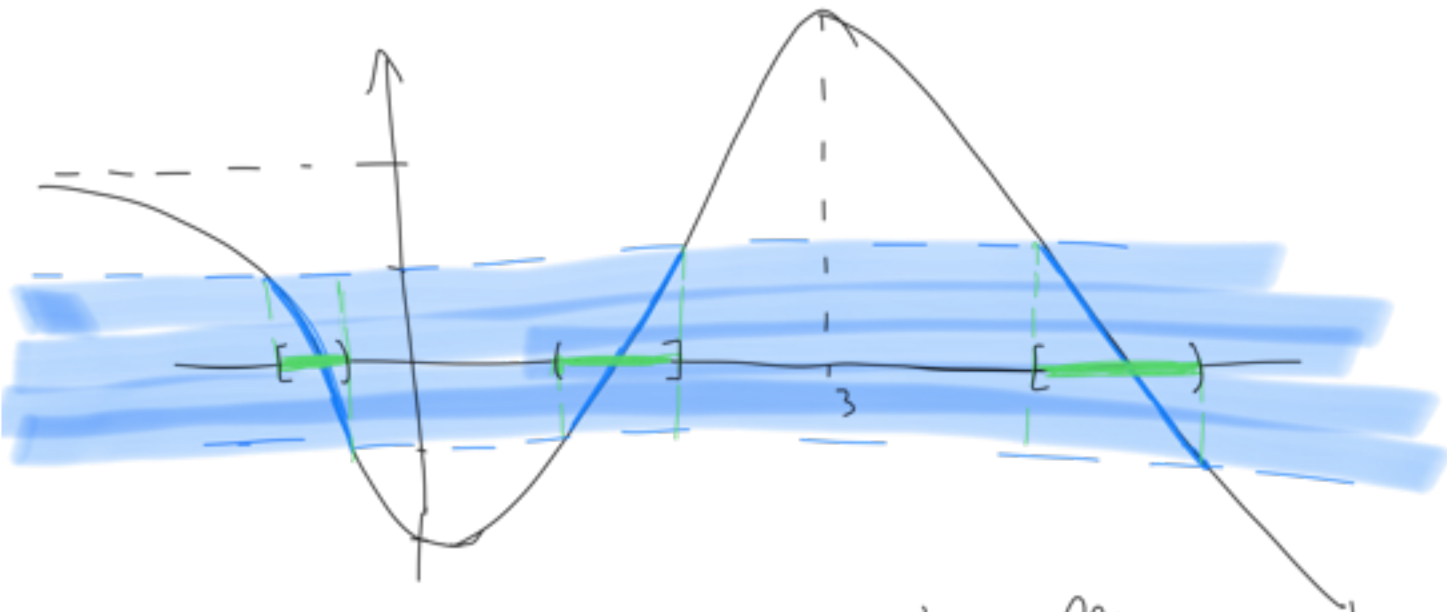
Soluzioni

Esercizio 0.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$



La risposta sono gli intervalli in verde

Nb. la controimmagine di $\{1\}$ è inclusa quella di $\{-1\}$ NO.

$f'(x) \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 3$

Esercizio 1.

$\ln(2x^2 - 1)$ è definito per

$2x^2 - 1 > 0 \iff x < -\sqrt{\frac{1}{2}} \cup x > \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\ln(2x^2-1) \geq 0 \iff 2x^2 - 1 \geq 1$

quindi $2x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \cup x \geq 1$

(derivata della funzione)

$f'(x) = \frac{4x}{2x^2-1}$ composta

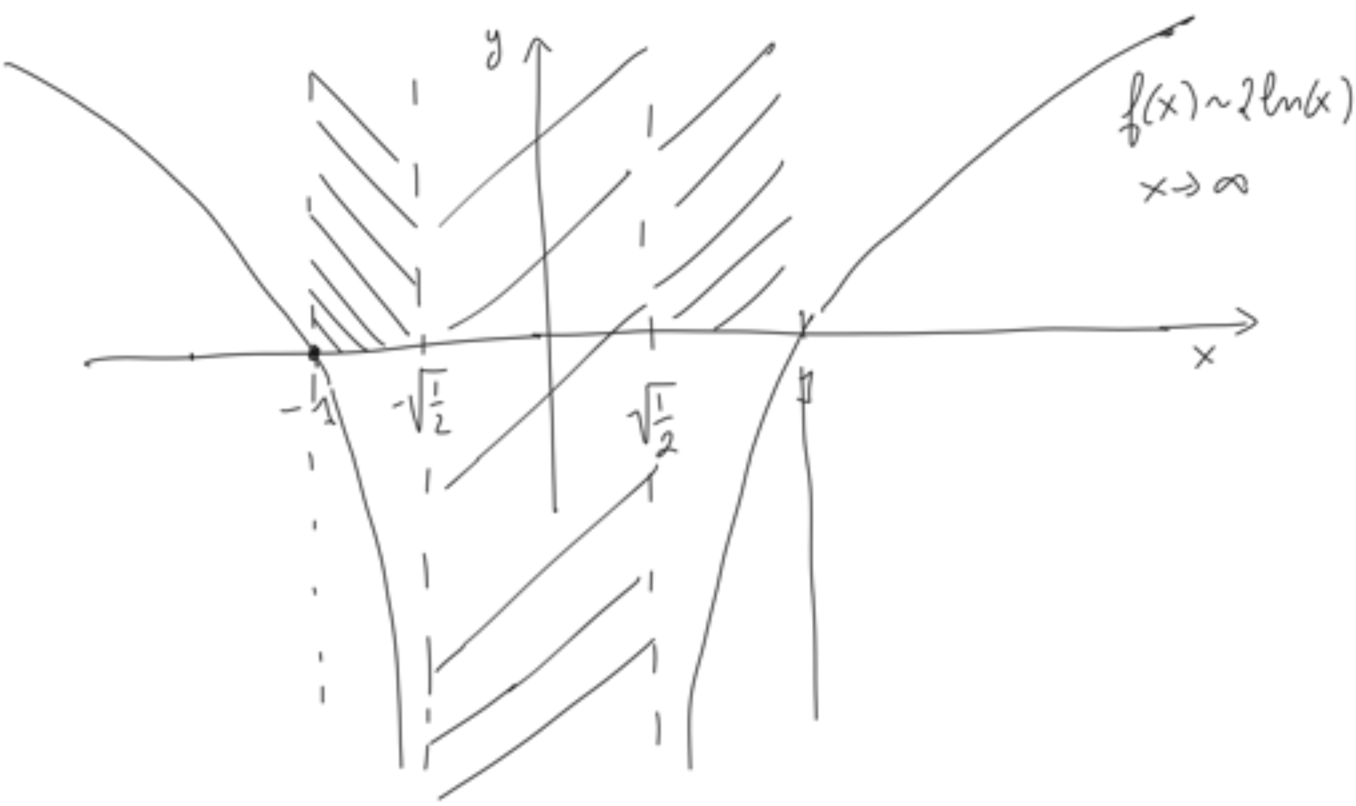
$f(x)$ è crescente se $f'(x) > 0$.

Studio il segno della derivata.

$f'(x) > 0$. Noto che il DOMINIO di $f(x)$ è definito dalla condizione $2x^2-1 > 0$. Quindi DOVUNQUE è definita $f(x)$ $2x-1>0$.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) \text{ è ben definita} \end{cases} \Rightarrow \quad x > 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln(2x^2-1) = \ln(\infty) = \infty$$



$$\int x \ln(2x^2-1)\, dx =$$

cambio la variabile: $y = 2x^2-1$

$$dy = 4x\,dx$$

$$= \int \ln(y) \cdot \frac{1}{4}\,dy = \frac{1}{4} \int \ln(y)\,dy \Big|_{y = 2x^2 - 1}$$

ora integro per parti:

$$\frac{1}{4} \int 1 \cdot \ln(y)\,dy = \frac{1}{4}\left(y \ln(y) - \int y \cdot \frac{1}{y}\,dy\right) =$$

$$= \frac{1}{4} y(\ln(y) - 1) + c$$

In conclusione:

$$\int x \ln(2x^2 - 1) = \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\left(\ln(2x^2 - 1) - 1\right) + c.$$

Esercizio 3.

$$f(x) = \sin(3x^2 - 2x) \qquad \text{in } x_0 = 0$$

$$f'(x) = (6x - 2)\cos(3x^2 - 2x)$$

$$f''(x) = 6 \cdot \cos(3x^2 - 2x) +$$

$$+ (6x - 2) \cdot \left[(6x - 2) \cdot \left(-\sin(3x^2 - 2x)\right)\right] =$$

$$= 6\cos(3x^2 - 2x) - (6x - 2)^2 \sin(3x^2 - 2x)$$

quindi $f(0) = 0$; $f'(0) = -2$; $f''(0) = 6$.

$$f(x) = 0 + (-2) \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (x - 0)^2 + R_2(x) =$$

$$= -2x + 3x^2 + R_2(x)$$