Primo esonero di
AM210/Analisi Matematica II, 10-11-2016

Ogni risposta va accuratamente motivata. Non si possono usare: libri, appunti, congegni elettronici, etc.

1. (10 punti) Trovare tutti i punti in cui è continua/differenziabile la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y(e^{x^3}-1-x^3)}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Domanda in piú: Le derivate seconde in $(x,y) = (0,0)$ sono continue? e le derivate terze?

una soluzione: Per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è banalmente C^∞ (somma prodotto composizione e rapporto di funzioni C^∞).

In $(x,y) = (0,0)$, dato che

$$e^{x^3} - 1 - x^3 = \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$$

e dato che

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx^6}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è omogenea di grado due e quindi C^2 si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^6}{x^4+y^4} \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^3}-1-x^3)}{x^6} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Calcolo

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0\,, \quad \partial_y f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$

e quindi per mostrare la differenziabilità serve di calcolare il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{kh^6}{(h^4+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} \lim_{h\to 0} \frac{(e^{h^3}-1-h^3)}{h^6} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

seconda soluzione si nota che

$$x^4 + y^4 > 1/2(x^2+y^2)^2, \quad y < \sqrt{x^2+y^2}\,, o(x^6) = o((x^2+y^2)^3)$$

e quindi si ha che

$$f(x,y) = \frac{yx^6}{2(x^4+y^4)} + \frac{y\, o((x^2+y^2)^3)}{x^4+y^4} = \frac{yx^6}{2(x^4+y^4)} + o((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}).$$

Quindi $f(x,y) = o((x^2+y^2))$, da questo si può dedurre direttamente che la funzione in zero è sia continua che differenziabile con $\nabla f(0,0) = 0$.

Infatti per definizione f è differenziabile se esiste una funzione lineare $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - L[(h,k)]}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

ma ponendo $L[] = 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - L[(h,k)]}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

altra soluzione: posto

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^6}{2(x^4+y^4)} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad h(x) = \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{x^6}$$

si ha che $g(x,y)$ è positivamente omogenea di grado tre, quindi continua e con derivate prime e seconde continue. D'altro canto $h(x)$ è C^∞ (usando la formula della serie di Taylor dell'esponenziale).

2. (10 punti) Dire se la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^{10}}{x-y^4} & \text{se } \ x \neq y^4 \\ 0 & \text{se } x = y^4 \end{cases}$$

è continua in $(x,y) = (0,0)$

soluzione: Non è continua basta fare il limite lungo la curva

$$x(t) = t^4 + t^{100}\,, \quad y(t) = t\,,$$

si ha

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t(t^4+t^{100})^{10}}{t^4+t^{100}-t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{41}(1+t^{96})^{10}}{t^{100}} = \infty$$

3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = xy^3 - yx^3,$$

trovarne i punti stazionari e discuterne la natura (non c'e' bisogno di usare l'hessiano).

soluzione Cerco i punti critici ponendo $\nabla f = 0$

$$\begin{cases} y^3 - 3yx^2 = 0 \\ x^3 - 3xy^2 = 0 \end{cases}$$

l'unica soluzione è $x = y = 0$.

La matrice Hessiana in $(0,0)$ è la matrice nulla (le derivate seconde di una funzione omogenea di grado 4 sono funzioni omogenee di grado due quindi in $(x,y) = 0$ valgono 0). Guardo il segno della funzione

$$f(x,y) = xy^3 - yx^3 = xy(y^2 - x^2) = xy(x+y)(y-x)$$

noto che se $y > x > 0$ la funzione è positiva. D'altro canto se $x > y > 0$ si ha che $xy(x+y) > 0$ ma $y - x < 0$ quindi $f(x,y) < 0$. Quindi $(0,0)$ non è ne un massimo ne un minimo.

3. Esercizio supplementare da svolgere solo dopo aver svolto gli altri.
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione positivamente omogenea di grado $\alpha > 0$. Dimostrare che se

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi)} |f(\sin(\theta), \cos(\theta))| = +\infty$$

allora la funzione non é continua in $(0,0)$.

soluzione: Per omogeneità

$$f(r\sin(\theta), r\cos(\theta)) = r^\alpha f(\sin(\theta), \cos(\theta))$$

dato che $|f(\sin(\theta), \cos(\theta))|$ non è limitata, per ogni $k > 0$ esiste θ_k tale che $|f(\sin(\theta_k), \cos(\theta_k))| > k$.

Allora per $k > 1$ considero la successione

$$(x_k, y_k) = (k^{-1/\alpha}\cos(\theta_k), k^{-1/\alpha}\sin(\theta_k)) \,, \quad (x_k, y_k) \to (0,0)$$

e per costruzione

$$f(x_k, y_k) > 1 \,, \qquad \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \neq 0$$

(non so se il limite esiste ma se esiste è maggiore di uno).

D'altro canto se faccio il limite lungo la successione $(X_k, Y_k) = (1/k, 1/k)$ ottengo zero. Quindi abbiamo due successioni con due limiti diversi.