

Teoria delle biforcazioni con applicazione al problema  
ristretto dei tre corpi



Dipartimento di Matematica e Fisica  
Corso di Laurea in Fisica

Gabriele Lioy

Relatore : Prof.ssa Michela Procesi  
Controrelatore : Prof. Roberto Franceschini

Anno Accademico 2019/2020



# Indice

<b>Introduzione</b>	5
<b>1 Calcolo differenziale su spazi di Banach</b>	9
1.1 Definizioni e notazioni	9
1.2 Applicazioni differenziabili	10
<b>2 Teoria delle biforcazioni</b>	15
2.1 Fenomenologia	15
2.2 Biforcazioni nell'ambito degli spazi di Banach	21
2.3 Riduzione di Lyapunov-Schmidt	22
2.4 I teoremi di biforcazione	25
2.5 Il Teorema del Centro di Lyapunov	35
<b>3 Il problema ristretto dei tre corpi</b>	39
3.1 Il problema dei due corpi	39
3.2 Il problema circolare planare ristretto dei tre corpi	42



# Introduzione

Il problema degli  $N$  corpi consiste nella determinazione dell'evoluzione futura di un sistema di  $N$  punti materiali dotati di massa, interagenti mediante la forza di gravità, note le posizioni e le velocità di tutti i corpi ad un dato istante di tempo.

La soluzione esplicita al caso  $N = 2$  è nota ormai dalla fine del XVII secolo, da quando, quasi un secolo dopo che Johannes Kepler formulò le sue leggi sul movimento dei pianeti intorno al Sole, Isaac Newton dedusse che questo movimento poteva essere spiegato mediante l'esistenza della forza di gravitazione universale, che è responsabile dell'attrazione reciproca fra i corpi celesti. Dall'introduzione della Legge di Gravitazione Universale Newton dedusse in seguito la soluzione esplicita al problema dei due corpi, e in particolare ricavò le Leggi di Kepler.

Nonostante l'enunciato del problema generale sia di facile comprensione, è noto che esso non ammetta soluzione esplicita sotto forma di un'espressione chiusa per  $N > 2$ , salvo in casi molto speciali. Nonostante le difficoltà intrinseche nella risoluzione analitica del problema, è comunque possibile, attraverso le tecniche che svilupperemo, estrarre da esso molte informazioni.

Lo scopo principale di questo lavoro di tesi è infatti illustrare alcuni risultati della teoria delle biforcazioni di equazioni funzionali definite su spazi di Banach e, come esempio di applicazione, dimostrare l'esistenza di traiettorie periodiche attorno ai punti di equilibrio del *problema circolare planare ristretto dei tre corpi*, una varietà particolare del caso  $N = 3$ . Le ipotesi semplificatrici saranno le seguenti: assumeremo che un corpo abbia massa trascurabile rispetto agli altri due (da cui *ristretto*), che i due corpi più massicci si muovano di moto circolare uniforme attorno al centro di massa del sistema che costituiscono (da cui *circolare*), e che il moto di tutti e tre si svolga su di un piano fisso (da cui *planare*).

L'interesse per la ricerca di soluzioni periodiche al problema è duplice: da un lato sono le soluzioni più semplici dopo le configurazioni di equilibrio, poiché la dinamica futura del sistema può essere, in questi casi, pienamente compresa analizzando solamente un intervallo di tempo finito; dall'altro, come notò Jules Henri Poincaré durante i suoi studi [10] sulla meccanica celeste, esse potrebbero fornire le basi di partenza per lo studio di traiettorie qualsiasi:

*“Ecco un fatto che non sono riuscito a dimostrare rigorosamente, ma che comunque mi sembra piuttosto plausibile. [...] Data una soluzione particolare di queste equazioni, possiamo sempre trovare una soluzione periodica (il cui periodo potrebbe, certo, essere molto lungo) tale per cui la differenza fra le due soluzioni sia arbitrariamente piccola, e per tempi arbitrariamente lunghi.”*

Per condurre la nostra analisi utilizzeremo, come anticipato, alcuni strumenti e risultati della teoria delle biforcazioni. É possibile infatti riformulare la ricerca di soluzioni periodiche di equazioni differenziali che descrivono la dinamica di un sistema meccanico, come quello del problema dei tre corpi, come un problema di biforcazione di soluzioni di un'equazione funzionale in un particolare ambiente infinito-dimensionale, ossia uno spazio di funzioni periodiche.

Nel Capitolo 1, dunque, verranno presentati i concetti di base del calcolo differenziale su spazi di Banach, che saranno necessari per formulare il Teorema della Funzione Implicita negli spazi di Banach, uno degli strumenti fondamentali della nostra analisi.

Nel Capitolo 2 saranno illustrati alcuni semplici fenomeni di biforcazione in dimensione finita, ovvero alcuni casi in cui le equazioni differenziali che descrivono un sistema dinamico dipendono da un parametro; in corrispondenza di alcuni valori critici di quest'ultimo, corrispondenti ai cosiddetti *punti di biforcazione*, la natura delle soluzioni cambia, per esempio è possibile che variando un parametro cambi il numero di punti di equilibrio. Successivamente verrà adottato un punto di vista più astratto, ossia quello della biforcazione da soluzioni di equazioni funzionali: verrà discusso il metodo di riduzione di Lyapunov-Schmidt, che permette di ridurre, in alcuni casi particolari, il numero di incognite di equazioni da infinito a finito. Questo metodo può essere utile quando non sono soddisfatte le ipotesi di applicabilità del Teorema della Funzione Implicita, e sarà fondamentale per studiare fenomeni di biforcazione in dimensione infinita. Questa tecnica di riduzione sarà utilizzata come base per giungere progressivamente a tre risultati: il Teorema Astratto di Biforcazione di Hopf, il Teorema di Biforcazione di Hopf, e il Teorema del Centro di Lyapunov.

Partiamo dall'ultimo di questi tre, e andiamo a ritroso per comprendere la necessità di questa costruzione: per analizzare il problema ristretto dei tre corpi utilizzeremo direttamente il Teorema del Centro di Lyapunov, che garantisce l'esistenza di una famiglia di soluzioni periodiche attorno a un punto di equilibrio di un sistema dinamico unidimensionale, posto che il corrispondente sistema linearizzato ammetta una coppia di autovalori immaginari coniugati non nulli, e che siano soddisfatte due ulteriori condizioni: che nessun altro autovalore del sistema linearizzato sia loro multiplo intero, e che esista un integrale primo del moto con hessiano non degenere nel punto di equilibrio in questione. Il Teorema di Biforcazione di Hopf, a partire dal quale dimostreremo il Teorema del Centro di Lyapunov, riguarda sistemi dinamici le cui equazioni differenziali dipendono da un parametro reale  $\mu$ , e assicura la biforcazione di soluzioni periodiche a partire da un punto di equilibrio al variare di  $\mu$ , posto che siano soddisfatte alcune condizioni sugli autovalori del corrispondente sistema linearizzato, che verranno analizzate in dettaglio nel seguito. Il Teorema Astratto di Biforcazione di Hopf, il punto di raccordo fra la teoria delle biforcazioni e il Teorema di Biforcazione di Hopf, inquadra il problema in maniera ancora più astratta e più generale, poiché grazie ad esso, sotto alcune ipotesi che discuteremo più avanti, è dimostrata l'esistenza di un punto di biforcazione da soluzioni di una famiglia di equazioni funzionali, che non debbano necessariamente essere equazioni differenziali, stavolta dipendenti da due parametri reali  $\mu$  e  $\omega$ . L'idea che permetterà di costruire un ponte fra le due visioni sarà la seguente: poiché nella ricerca di soluzioni periodiche attorno a un punto di equilibrio di un sistema dinamico non è noto, a priori, il loro periodo, è possibile ovviare al problema riscaldando il tempo di un fattore opportuno, che compare di conseguenza sotto forma di parametro nelle equazioni differenziali che governano la dinamica del sistema. A questo punto il sistema da studiare è

diventato una famiglia di sistemi, ma la ricerca delle soluzioni periodiche di periodo ignoto può essere semplificata nella ricerca di soluzioni  $2\pi$ -periodiche. É questa idea, chiaramente, che fa comprendere il motivo del passaggio verso lo spazio infinito-dimensionale delle funzioni periodiche di periodo fissato, e la necessità dello sviluppo della teoria delle biforcazioni per equazioni funzionali su spazi di Banach.

Nel Capitolo 3 studieremo il problema gravitazionale dei due corpi a partire dai Principi della Dinamica e dalla Legge di Gravitazione Universale di Newton, determinando in particolare la forma delle orbite mediante un processo di riduzione di gradi di libertà ottenuto disaccoppiando le equazioni differenziali del problema, dopodiché, utilizzando il Teorema del Centro di Lyapunov, applicheremo quanto visto finora allo studio del problema circolare planare ristretto dei tre corpi.





# Capitolo 1

## Calcolo differenziale su spazi di Banach

### 1.1 Definizioni e notazioni

Questa sezione ha un duplice scopo: da un lato estendere alle applicazioni fra spazi di Banach i concetti di base del calcolo differenziale, come quelli di differenziale e di derivata, dall'altro presentare le generalizzazioni a questo contesto di risultati come il Teorema della Funzione Implicita. Di seguito  $X, Y, Z$  saranno spazi (reali) di Banach.

**Definizione 1.1.1.** Una successione  $x_n$  a valori in  $X$  si dice convergere in senso forte a  $\bar{x} \in X$  se  $|x_n - \bar{x}|_X \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , come successione numerica. In questo caso diremo semplicemente che  $x_n \rightarrow x$ , o che la successione  $x_n$  tende a  $x$ .

**Definizione 1.1.2.** Un'applicazione  $h : X \rightarrow Y$  è continua se per ogni successione a valori in  $X$ ,  $x_n \rightarrow x$  implica  $h(x_n) \rightarrow h(x)$ . Indicheremo in seguito con  $C(X, Y)$  l'insieme delle applicazioni continue da  $X$  a  $Y$ .

**Definizione 1.1.3.**  $f : X \rightarrow Y$  è detta un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare, o semplicemente un'applicazione lineare, se  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ,  $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall x, \forall y \in X$ . Indicheremo con  $\mathcal{L}(X, Y)$  l'insieme delle applicazioni lineari e continue da  $X$  a  $Y$ , mentre chiameremo  $\mathbb{1}$  l'applicazione identica  $\mathbb{1} : X \rightarrow Y, \mathbb{1}(x) = x$ .

L'insieme  $\mathcal{L}(X, Y)$  può essere reso a sua volta uno spazio di Banach, per esempio utilizzando la norma operatoriale:

$$\forall T \in \mathcal{L}(X, Y), \quad |T| := \sup_{|x|_X \leq 1} \{|T(x)|_Y\}$$

**Definizione 1.1.4.** Dato  $A \in \mathcal{L}(X, X)$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , diremo che  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  se esiste una soluzione non nulla, detta  $x \in X$ , a  $Ax = \lambda x$ . In tal caso  $x$  è detto un autovettore relativo all'autovalore  $\lambda$ .

Nel caso in cui  $Y = X$  useremo notazioni del tipo  $C(X), \mathcal{L}(X)$  in luogo di  $C(X, X)$  e  $\mathcal{L}(X, X)$ . Consideriamo il prodotto cartesiano fra un numero finito di spazi di Banach  $\{(X_j, |\cdot|_j)\}_{j=1}^n$ ,

$\mathcal{X} := \prod_{j=1}^n X_j$ . Esso può essere reso uno spazio di Banach a sua volta, definendo per esempio per ogni  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$ ,  $\|x\|_\infty := \max_i \|x_i\|$ . Consideriamo ora il caso delle applicazioni il cui dominio è il prodotto cartesiano fra un numero finito di spazi di Banach, ossia:

$$f : \prod_{j=1}^n X_j \longrightarrow Y.$$

Diremo che  $f$  è  $n$ -lineare se è lineare in ogni sua variabile, o che  $f \in \mathcal{L}(X_1 \times \dots \times X_n, Y)$ . Nel caso in cui  $X_1 = X_2 = \dots = X_n =: X$ , diremo che  $f \in \mathcal{L}_n(X, Y)$ .

**Definizione 1.1.5.** *Un'applicazione  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$  si dice un isomorfismo se è biiettiva con inversa continua. In tal caso si dice che  $X$  e  $Y$  sono isomorfi, o che  $X \simeq Y$ . Chiameremo  $\text{Iso}(X, Y)$  l'insieme di tutti gli isomorfismi fra  $X$  ed  $Y$ .*

**Definizione 1.1.6.** *Un'applicazione  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$  si dice un isomorfismo isometrico se è allo stesso tempo un isomorfismo ed un'isometria, ossia se  $\|f(x)\|_Y = \|x\|_X, \forall x \in X$ . In questo caso diremo che  $X$  e  $Y$  sono isometricamente isomorfi, o che  $X \cong Y$ .*

Ricordiamo che  $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \cong \mathcal{L}_2(X, Y)$ ,  $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))) \cong \mathcal{L}_3(X, Y)$  e così via. Inoltre se  $E$  è uno spazio di Banach,  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, E) \cong E$ .

## 1.2 Applicazioni differenziabili

Considereremo adesso funzioni definite su spazi di Banach, o comunque su sottoinsiemi aperti di essi. Poiché la differenziabilità è un concetto locale non porremo troppa attenzione su questo punto. Estendendo in modo naturale la definizione di differenziabilità dal caso finito-dimensionale, diamo la seguente definizione:

**Definizione 1.2.1** (Applicazione differenziabile secondo Fréchet). *Sia  $U$  un sottoinsieme aperto dello spazio di Banach  $X$ .  $f : U \rightarrow Y$  è differenziabile secondo Fréchet o F-differenziabile nel punto  $u \in U$  se esiste un'applicazione lineare e continua  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  che soddisfi:*

$$f(u+h) - f(u) - A(h) = o(\|h\|_X), \quad h \rightarrow 0.$$

Nel caso in cui esista una tale  $A$ , essa è univocamente determinata ed è detta il *differenziale* di  $f$  in  $u$ , e si pone  $df_u := A$ . Da questa definizione seguono le seguenti proprietà:

1. Una funzione costante è F-differenziabile, e il suo differenziale è l'applicazione nulla.
2. Una applicazione  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  è F-differenziabile ovunque, e il suo differenziale è l'applicazione  $A$  stessa, indipendentemente dal punto  $u$ :  $dA_u = A, \forall u \in X$ .
3. Se  $f, g : U \rightarrow Y$  sono entrambe differenziabili in  $u \in U$ , per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  la funzione  $\alpha f + \beta g$  è a sua volta differenziabile, e si ha:

$$d(\alpha f + \beta g)_u = \alpha df_u + \beta dg_u$$

4. Se  $f : U \rightarrow Y$  e  $g : V \rightarrow Z$ , con  $V \subseteq Y$  aperto, se  $f$  è F-differenziabile in  $u \in U$ , e  $g$  è F-differenziabile in  $v := f(u)$ , a sua volta la funzione composta  $g \circ f : U \rightarrow Z$  è F-differenziabile in  $u$ , e si ha:

$$d(g \circ f)_u = dg_v \circ df_u, \quad \text{ossia} \quad d(g \circ f)_u(h) = dg_{f(u)}(df_u(h)), \quad \forall h \in X$$

5. Se  $f : U \rightarrow Y$  è F-differenziabile in  $u \in U$ , allora è anche continua in  $u$ .
6. La definizione di differenziabilità secondo Fréchet si riduce alla nota definizione di differenziabilità nel caso finito-dimensionale. In questo caso, è sufficiente assumere che  $A$  sia lineare, e sarà automaticamente continua.

Definiamo ora la derivata:

**Definizione 1.2.2** (Derivata di un'applicazione). *Supponiamo che  $f : U \rightarrow Y$  sia F-differenziabile nell'aperto  $U$ . Allora la derivata di  $f$  è definita come la funzione che a ogni punto di  $U$  associa il differenziale di  $f$  in quel punto:*

$$f' : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y), \quad f'(u) = df_u$$

É possibile estendere in un altro modo la nozione di differenziabilità, basandosi sulla definizione di derivata direzionale:

**Definizione 1.2.3** (Applicazione differenziabile secondo Gâteaux). *Diremo che  $f : X \rightarrow Y$  è differenziabile secondo Gâteaux, o G-differenziabile, nel punto  $u$ , se esiste un'applicazione  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  tale per cui:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t} = A(h).$$

Nel caso in cui esista una tale  $A$ , essa è univocamente determinata ed è detta il *G-differenziale* di  $f$  in  $u$ , e si pone  $d_G f_u := A$ . Da quanto appena detto segue:

1. Se  $f : X \rightarrow Y$  è differenziabile secondo Fréchet nel punto  $u \in X$ , allora è differenziabile secondo Gâteaux nello stesso punto  $u$ , e i due differenziali coincidono;
2. L'inverso non è vero, e anzi la differenziabilità secondo Gâteaux non implica neanche la continuità;
3. É possibile definire la derivata allo stesso modo in cui è stata definita la derivata secondo Fréchet. Una funzione derivabile secondo Gâteaux e con derivata continua è differenziabile secondo Fréchet.

Nel seguito diremo “differenziabile” e “F-differenziabile” senza fare distinzioni. Per quanto riguarda i differenziali di ordine superiore, essi possono essere definiti induttivamente:

**Definizione 1.2.4** (Applicazione due volte differenziabile). *Una funzione  $f : U \rightarrow Y$ , F-differenziabile in  $U$ , si dice due volte differenziabile secondo Fréchet in  $u$  se la funzione derivata prima  $f'$  è F-differenziabile in  $u$ , e si pone:*

$$d^2 f_u : X \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y) \quad d^2 f_u := d(f')_u$$

Segue dalla definizione che  $d^2 f_u \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ , e essendo quest'ultimo insieme isometricamente isomorfo all'insieme delle applicazioni bilineari e continue da  $X$  ad  $Y$ , ossia valendo  $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \cong \mathcal{L}_2(X, Y)$ , possiamo identificare il differenziale secondo con un'applicazione, appunto, bilineare e continua dallo spazio di partenza a quello di arrivo. La derivata seconda è a sua volta definita a partire dal differenziale secondo, come la funzione che ad ogni punto associa il differenziale secondo della funzione in quel punto:

$$f'' : U \longrightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \cong \mathcal{L}_2(X, Y) \quad f''(u) = d^2 f_u .$$

A questo punto è possibile definire induttivamente il differenziale  $(n + 1)$ -esimo di  $f$  come il differenziale della derivata  $n$ -esima, nel caso in cui quest'ultimo esista. La definizione di funzione  $n$  volte differenziabile è a questo punto ovvia. A sua volta, la derivata  $n$ -esima è definita a partire dal differenziale  $n$ -esimo. Seguendo lo stesso schema della definizione del differenziale secondo avremo, anche per  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n)} : U &\longrightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{L}_{n-1}(X, Y)) \cong \mathcal{L}_n(X, Y) & f^{(n)}(u) &= d^n f_u \\ d^{n+1} f_u &\in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}_n(X, Y)) \cong \mathcal{L}_{n+1}(X, Y) & d^{n+1} f_u &= d(f^{(n)})_u \end{aligned}$$

È possibile, dunque, identificare il differenziale  $n$ -esimo con una particolare applicazione  $n$ -lineare e continua, ossia con un elemento di  $\mathcal{L}_n(X, Y)$ . Facciamo notare che il differenziale è per definizione un'applicazione lineare e continua, mentre la derivata non è necessariamente lineare. Abbiamo inoltre:

**Teorema 1.2.1.** *Se la funzione  $f : U \rightarrow Y$  è  $n$  volte differenziabile in  $U$ , il differenziale  $n$ -esimo,  $d^n f_u \in \mathcal{L}_n(X, Y)$  è un'applicazione simmetrica.*

**Definizione 1.2.5.** *Diremo che  $f$  è di classe  $C^k$  se tutte le sue derivate fino alla  $k$ -esima esistono e sono continue. Chiamiamo con  $C^k(X, Y)$  l'insieme delle funzioni  $f : X \rightarrow Y$  di classe  $C^k$ .*

Notiamo esplicitamente che spesso lavoreremo in spazi ambiente corrispondenti a classi di regolarità più alte dei minimi requisiti per la validità dei risultati utilizzati, in modo da poter eseguire operazioni come la derivazione termine a termine della serie di Fourier. Estendiamo ora, nel modo naturale, la definizione di derivate parziali. Consideriamo l'applicazione  $f : \prod_{j=1}^n X_j \rightarrow Y$ . Diremo che  $f$  è differenziabile rispetto a  $x_k$  in  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  se è differenziabile in 0 la funzione:

$$t \mapsto f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k + t, \dots, \bar{x}_n)$$

Il differenziale parziale  $\partial_{x_k} f_{\bar{x}}$ , che indicheremo anche con  $\partial_{x_k} f(\bar{x})$ , sarà allora definito come il differenziale della funzione "ristretta" appena definita. La definizione di derivata parziale è dunque analoga a quella della derivata, a patto di definirla a partire dal differenziale parziale. Dalle definizioni segue che se  $f : \prod_{j=1}^n X_j \rightarrow Y$  è differenziabile in un punto  $u$  del dominio, ammette tutte le derivate parziali in  $u$  e inoltre:

$$d_u f(h) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_u(h_j)$$

Le derivate parziali di ordine superiore sono definite in maniera completamente analoga al caso finito-dimensionale. Sempre in analogia con il caso finito-dimensionale, abbiamo i seguenti risultati:

**Teorema 1.2.2** (Formula di Taylor). *Sia  $f : U \rightarrow Y$ , e siano  $u$  e  $u + h$  punti di  $U$ , tali che il segmento  $[u, u + h]$  sia interamente contenuto in  $U$ . Se  $f \in C^k(U, Y)$  allora:*

$$f(u + h) - f(u) = df_u(h) + \frac{1}{2!}d^2f_u(h, h) + \dots + \frac{1}{k!}d^k f_u(h, \dots, h) + o(|h|^n), \quad h \rightarrow 0.$$

**Teorema 1.2.3** (Teorema della Funzione Implicita). *Consideriamo due aperti  $W \subseteq Y$  e  $U \subseteq X$ . Sia  $f \in C^k(W \times U, Z)$ ,  $k \geq 1$ , e sia  $(\bar{y}, \bar{x}) \in W \times U$  tale che  $f(\bar{y}, \bar{x}) = 0$ . Supponiamo inoltre che  $\partial_x f(\bar{y}, \bar{x}) \in \text{Inv}(X, Z)$ . Allora esistono due intorni  $B_y$  di  $\bar{y}$  e  $B_x$  di  $\bar{x}$ , e una funzione  $g \in C^k(B_y, B_x)$ , tali che:*

1. Per ogni  $(y, x) \in B_y \times B_x$ , si ha che  $x = g(y)$  se e solo se  $f(y, x) = 0$ .
2.  $g'(y) = -(\partial_x f(y, g(y)))^{-1} \circ (\partial_y f(y, g(y)))$ , per ogni  $y \in B_y$ .

**Esempio 2.2.4** Consideriamo un esempio di utilizzo del Teorema della Funzione Implicita, ossia supponiamo di voler trovare le soluzioni  $2\pi$ -periodiche e di classe  $C^3$ , ossia le soluzioni in  $C_{2\pi}^3(\mathbb{R})$  (in seguito useremo notazioni analoghe per indicare gli spazi di funzioni periodiche) della seguente equazione differenziale:

$$\ddot{u}(t) + \sqrt{2}u(t) + u^3(t) = g(t),$$

dove  $g(t) \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$  è una funzione assegnata. La risoluzione dell'equazione differenziale può essere pensata come la risoluzione dell'equazione funzionale  $f(u, g) = 0$ , con la posizione:

$$f : C_{2\pi}^3(\mathbb{R}) \times C_{2\pi}^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_{2\pi}^1(\mathbb{R}), \quad f(u, g) = \ddot{u} + \sqrt{2}u + u^3 - g.$$

Il differenziale parziale di  $f$  rispetto a  $u$ , calcolato in  $(u = 0, g = 0)$ , è  $h \mapsto \ddot{h} + \sqrt{2}h$ , che essendo diagonale sulla base di Fourier, con tutti autovalori non nulli, è una mappa iniettiva. La mappa è anche suriettiva, come possiamo notare considerando la seguente equazione, nell'incognita  $h$ , e dove  $y \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$  è assunta nota:

$$\ddot{h} + \sqrt{2}h = y.$$

Possiamo determinare la soluzione di quest'equazione ottenendo una relazione per i suoi coefficienti di Fourier. Espandendo infatti in serie di Fourier sia  $h$  che  $y$ , e quindi scrivendo:

$$h(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{ikt}, \quad y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k e^{ikt}, \quad \text{con } h_k, y_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z},$$

si ottiene, derivando termine a termine l'equazione di prima:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} -k^2 h_k e^{ikt} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h_k e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k e^{ikt},$$

e dunque:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\sqrt{2} - k^2) h_k e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k e^{ikt}.$$

Proiettando adesso su ogni componente della base di Fourier, si ha  $\forall k \in \mathbb{Z}$ :

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{2} - k^2} \cdot y_k,$$

per cui, infine:

$$h(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2} - k^2} y_k e^{ikt}.$$

Per concludere facciamo notare che da  $y \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$  e dalla relazione appena scritta segue che la classe di regolarità di  $h$  è  $C^3$ . Tornando al problema originale di determinare soluzioni di  $f(u, g) = 0$ , il Teorema della Funzione Implicita è dunque applicabile, fornendo una soluzione non banale a  $f(u, g) = 0$  in un intorno di  $(u, g) = (0, 0)$  (se  $g \neq 0$ , allora  $u = 0$  non è soluzione).

# Capitolo 2

## Teoria delle biforcazioni

### 2.1 Fenomenologia

Informalmente, una biforcazione è un cambiamento qualitativo dell'insieme delle soluzioni di una data famiglia di equazioni dipendente da uno o più parametri, come conseguenza della variazione di questi ultimi. Se le equazioni che stiamo considerando sono equazioni differenziali che descrivono un sistema dinamico, una biforcazione può consistere nella nascita, distruzione o cambiamento della natura di uno più punti di equilibrio. In questo paragrafo analizzeremo alcuni semplici esempi di biforcazione nell'ambito di sistemi dinamici: consideriamo come primo esempio il sistema costituito da un pendolo semplice composto da una sbarra rigida di lunghezza  $l$  e massa trascurabile, con un'estremità fissa, in un sistema di riferimento inerziale, in un punto che chiameremo  $O$ , mentre all'altra è collegato un punto materiale di massa  $m$ .

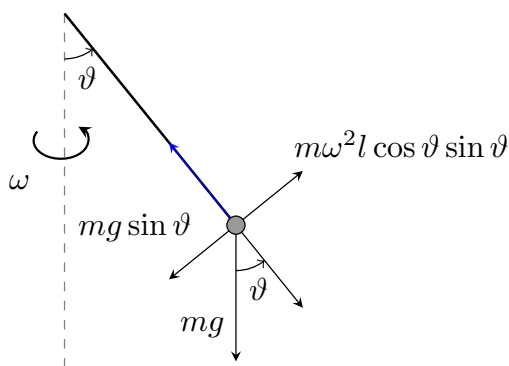


Figura 2.1: Diagramma delle forze

Supponiamo inoltre che l'intero sistema risenta dell'azione della forza peso  $mg$  e che il piano in cui si svolge il moto sia in rotazione rigida attorno all'asse verticale del pendolo, con velocità angolare costante  $\omega$ . Nel sistema di riferimento non inerziale solidale con il moto di rotazione del piano, questo effetto si manifesta tramite una forza che spinge la massa verso

l'esterno. La forza di Coriolis infatti non ha effetto sulla dinamica del sistema in esame (ossia richiediamo che il punto materiale possa muoversi solo nel piano rotante), per cui l'unico effetto dovuto alla non inerzialità del sistema di riferimento è la forza centrifuga. In accordo con il Secondo Principio della Dinamica, l'equazione del moto proiettata in direzione tangenziale al moto conduce alla seguente equazione differenziale per la variabile angolare  $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ :

$$ml\ddot{\vartheta} = -mg \sin \vartheta + m\omega^2 l \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Definiamo  $\eta := \dot{\vartheta}$ , ottenendo così il sistema dinamico del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \eta \\ \dot{\eta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta + \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{cases}$$

Gli angoli  $\vartheta$  che corrispondono a punti di equilibrio sono le soluzioni di:

$$\sin \vartheta \left( \cos \vartheta - \frac{g}{\omega^2 l} \right) = 0.$$

È evidente che sono presenti sempre punti di equilibrio in  $\vartheta = 0$  e in  $\vartheta = \pi$ , mentre l'equazione  $\cos \vartheta - g/\omega^2 l = 0$  non ha sempre soluzioni. La condizione per averne è  $g \leq \omega^2 l$ , ossia, a  $l$  e  $g$  fissati, che  $\omega \geq \sqrt{g/l}$ . Fintanto che il piano ruota con velocità angolare sufficientemente bassa, dunque, il sistema continua comunque a presentare due soli punti di equilibrio, mentre non appena viene superata la soglia  $\omega = \sqrt{g/l}$ , appaiono due nuovi punti di equilibrio a causa della compensazione fra forza centrifuga e forza peso. Prima di analizzare la stabilità dei punti di equilibrio, facciamo notare esplicitamente che stiamo utilizzando la definizione di stabilità secondo Lyapunov, e dunque, denotando con  $\varphi(t, \bar{x})$  la soluzione che si origina dal dato iniziale  $\bar{x}$ :

**Definizione 2.1.1** (Stabilità secondo Lyapunov). *Un punto di equilibrio  $x_0$  di un sistema dinamico  $\dot{x} = f(x)$  è detto stabile se la soluzione che si origina in punti ad esso vicini non si allontana troppo, per tutti i tempi, da esso. Più precisamente  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$  tale che  $\forall \bar{x} \in B_{\delta_\epsilon}(x_0), \varphi(t, \bar{x}) \in B_\epsilon(x_0), \forall t \geq 0$ . Se questa condizione non è verificata,  $x_0$  è detto un punto di equilibrio instabile.  $x_0$  è inoltre detto attrattivo se esiste un suo intorno  $U$  per cui  $\forall \bar{x} \in U, |\varphi(t, \bar{x}) - x_0| \rightarrow 0$ , per  $t \rightarrow +\infty$ , ed infine  $x_0$  è detto asintoticamente stabile se stabile ed attrattivo.*

Tornando alla natura dei punti di equilibrio del sistema in esame, essa può essere determinata dal segno della derivata prima della funzione  $\dot{\eta}(\vartheta)$  (ossia, a meno di un segno e di una costante moltiplicativa, della derivata seconda dell'energia potenziale  $U(\vartheta)$ ) in corrispondenza dei punti di equilibrio:

$$\frac{d}{d\vartheta} \left( -\frac{g}{l} \sin \vartheta + \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) = -\frac{g}{l} \cos \vartheta + \omega^2 (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)$$

$$\vartheta = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} (\dot{\eta}(\vartheta)) = -\frac{g}{l} + \omega^2, \quad \vartheta = \pi \Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} (\dot{\eta}(\vartheta)) = \frac{g}{l} + \omega^2 > 0,$$

$$\vartheta_\pm = \pm \arccos \left( \frac{g}{\omega^2 l} \right) \Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} (\dot{\eta}(\vartheta)) = \left( \frac{g}{\omega l} \right)^2 - \omega^2 \leq 0 \text{ se } \omega \geq \sqrt{g/l}.$$



Notiamo che il punto  $\vartheta = \pi$  è dunque sempre instabile, i punti  $\vartheta = \vartheta_{\pm}$  quando esistono sono sempre stabili, mentre la natura dell'origine  $\vartheta = 0$  è mutevole, rimanendo essa un punto di equilibrio stabile per  $0 \leq \omega \leq \sqrt{g/l}$  e divenendo al contrario instabile per valori superiori della velocità angolare. Definiamo il parametro adimensionale  $\lambda := \omega^2 l/g$ , che farà da parametro di controllo, in modo tale che si abbia la genesi dei nuovi punti di equilibrio per  $\lambda \geq 1$ .

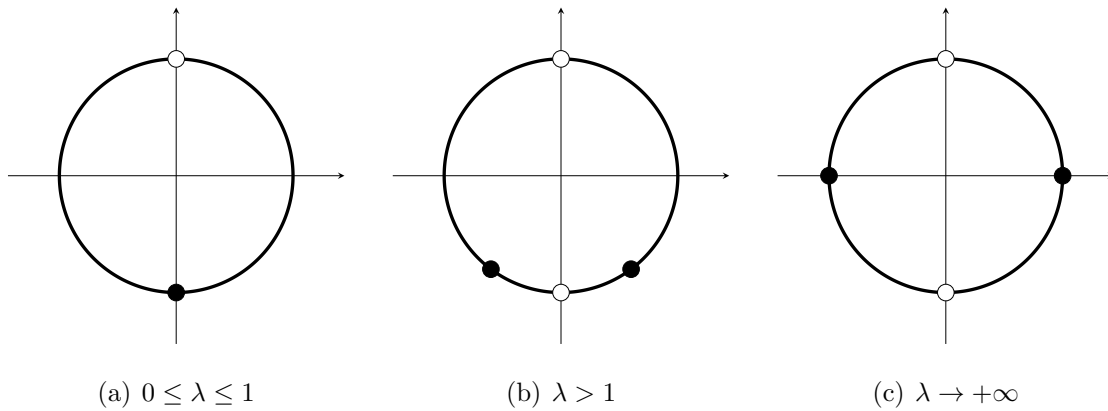


Figura 2.2: Punti di equilibrio del pendolo rotante

In Figura 2.2 è possibile visualizzare l'insieme di valori che può assumere  $\vartheta$ , con i punti di equilibrio corrispondenti alla rotazione lenta ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) e veloce ( $\lambda > 1$ ). Inoltre è raffigurato il limite di rotazione infinitamente veloce  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

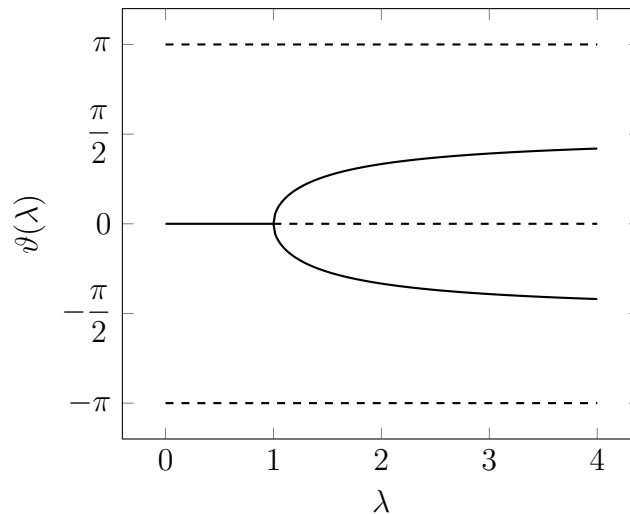


Figura 2.3: Diagramma di biforcazione del pendolo rotante

Un metodo di visualizzazione particolarmente suggestivo è il cosiddetto *diagramma di biforcazione* del sistema (Figura 2.3), che consente di visualizzare tutte le situazioni possibili contemporaneamente. Sull'asse delle ascisse posizioniamo il parametro  $\lambda$ , che immaginiamo

di poter variare con continuità come una variabile indipendente, mentre sull'asse delle ordinate graficheremo, a  $\lambda$  fissato, le coordinate dei punti di equilibrio  $\vartheta(\lambda)$  del sistema. Come è d'uso, rappresentiamo con linee continue i punti di equilibrio stabili, e con delle linee tratteggiate i punti di equilibrio instabili. Da notare dunque la cosiddetta biforcazione, che avviene a  $\lambda = 1$ , e gli asintoti orizzontali a  $\vartheta(\lambda) = \pm \pi/2$ . Il fenomeno appena osservato è un esempio di *biforcazione a forchetta*. In questo caso la biforcazione, il cui nome deriva dalla forma caratteristica del diagramma di biforcazione, è consistita nella comparsa dei nuovi punti di equilibrio e nel mutamento della natura (da stabile a instabile) di uno dei punti di equilibrio, mentre il parametro la cui variazione ha determinato la biforcazione è  $\lambda$ , e dunque, a fissati  $l$  e  $m$ , proprio la velocità angolare di rotazione  $\omega$ .

Passiamo adesso ad un altro esempio: osserveremo una biforcazione per un sistema dinamico che prevede il fenomeno di sincronizzazione delle lucciole [5], partendo da semplici ipotesi sulla risposta della lucciola agli stimoli esterni, ovvero sulla sua capacità di modificare il proprio ritmo di emissione di segnali luminosi. Ciò che si osserva, e che cercheremo di prevedere, è che se lo stimolo esterno consiste in una pulsazione luminosa periodica, con periodo vicino a quello di emissione naturale della lucciola, essa è in grado di modificare la propria frequenza di emissione in modo da riprodurre lo stimolo, mentre per periodi troppo brevi o troppo lunghi questa capacità viene persa. La variabile in esame sarà  $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , che rappresenta la fase del ritmo di pulsazione. Supponiamo che  $\vartheta = 0$  rappresenti l'emissione di luce e che, in assenza di stimoli, l'insetto emetta luce con la sua frequenza naturale, secondo la legge  $\dot{\vartheta} = \omega$ . Ora supponiamo di introdurre uno stimolo esterno (per esempio una torcia, o un'altra lucciola) che emette impulsi di luce con fase  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  secondo la legge  $\dot{\psi} = \Omega$  e che anche per esso  $\psi = 0$  significhi emissione di luce. Facciamo la seguente ipotesi sulla risposta della lucciola, per costruire l'equazione differenziale che governa l'evoluzione di  $\vartheta$  nel tempo: se l'influenza esterna è in anticipo rispetto ad essa, inizia ad accelerare la sua pulsazione, se invece al contrario lo stimolo esterno è in ritardo la lucciola rallenta, per tentare in entrambi i casi di sincronizzarsi. Possiamo, come anticipato, modellizzare queste ipotesi richiedendo che la fase  $\vartheta$  risolva la seguente equazione differenziale:

$$\dot{\vartheta} = \omega + A \sin(\psi - \vartheta)$$

Qui  $A > 0$  rappresenta il potere di reset della lucciola (*resetting strength*): se  $A = 0$  essa non è in grado di modificare l'andamento del suo luccichio, mentre più  $A$  è grande, più velocemente questa modifica può essere operata. Inoltre notiamo che se  $0 < \psi - \vartheta < \pi$ , ossia se l'impulso esterno è in anticipo, si ha  $\dot{\vartheta} > \omega$ , e quindi un aumento della velocità, mentre al contrario se  $-\pi < \psi - \vartheta < 0$  avremo  $\dot{\vartheta} < \omega$  e quindi la lucciola rallenta. La domanda che ci poniamo è dunque se ci possa essere un modo affinché la lucciola si sincronizzi con lo stimolo esterno. Per rispondere a questa domanda analizziamo la dinamica di  $\varphi := \psi - \vartheta$ :

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} - \dot{\vartheta} = \Omega - \omega - A \sin \varphi.$$

I punti di equilibrio di questo sistema dinamico, ossia le configurazioni in cui la differenza di fase fra lucciola e sorgente esterna è costante, si hanno per:

$$\frac{\Omega - \omega}{A} = \sin \varphi.$$

Questa condizione ci suggerisce di introdurre il parametro adimensionale  $\lambda := (\Omega - \omega)/A$ , che avrà il ruolo di parametro di controllo, per cui il sistema dinamico diviene:

$$\dot{\varphi} = A(\lambda - \sin \varphi)$$

Studiamo la natura dei punti di equilibrio per  $\lambda \geq 0$ , poiché per  $\lambda < 0$  il discorso è simmetrico: si tratta di sostituire anticipi con ritardi e viceversa. Per  $\lambda > 1$  non esistono punti di equilibrio, e la differenza di fase continua ad aumentare indefinitamente (*phase drift*), per cui non si ha sincronizzazione. Per  $\lambda = 1$  abbiamo un punto di equilibrio instabile ma attrattivo, in  $\pi/2$  (e dunque al limite della capacità di adattamento  $A$ , la lucciola riesce a far tendere la sua risposta a un ritardo, o anticipo, costante e pari a un quarto di periodo). Per  $0 < \lambda < 1$  si avrà un punto di equilibrio stabile in  $\arcsin \lambda$ , e uno instabile in  $\pi - \arcsin \lambda$ , per cui tutte le traiettorie portano verso il punto di equilibrio stabile, ovvero in un piccolo intervallo di periodi attorno a quello naturale di emissione della lucciola, la differenza di fase fra la sua emissione e quella dello stimolo tende a diventare costante ma diversa da zero, ed entro un quarto di periodo, ossia come prima la lucciola diviene *phase-locked*. Infine per  $\lambda = 0$  abbiamo un punto di equilibrio stabile in  $0$ , e uno instabile in  $\pi/2$ , ossia se lo stimolo e la lucciola hanno esattamente la stessa pulsazione naturale, prima o poi tenderanno oscillare non solo con la stessa fase ma in unisono, eccezione fatta per la condizione iniziale corrispondente a una differenza di fase pari a metà periodo. Il tipo di biforcazione che presenta questo fenomeno è detto *biforcazione a nodo sella*. La differenza con la biforcazione osservata nell'esempio del pendolo è la totale scomparsa o comparsa di punti di equilibrio al variare del parametro di controllo, e allo stesso tempo la creazione (o distruzione) simultanea di un punto di equilibrio stabile e uno instabile.

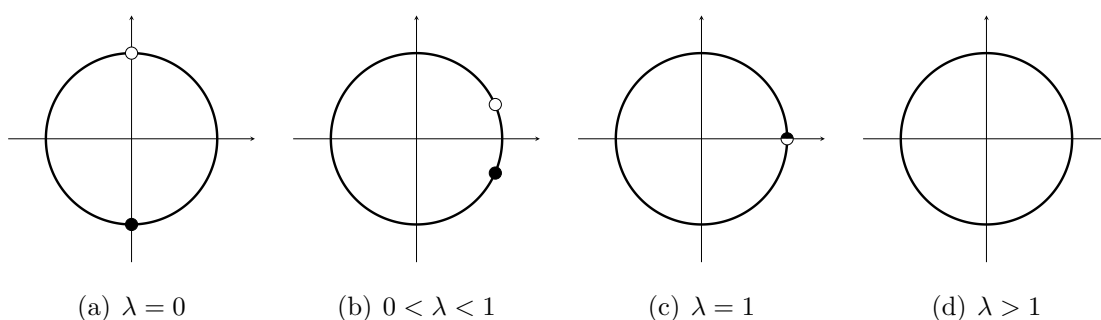


Figura 2.4: Punti d'equilibrio del problema della lucciola

Riportiamo il corrispondente diagramma di biforcazione, dal quale si può vedere chiaramente che prima di  $\lambda = -1$  e dopo  $\lambda = +1$  i punti di equilibrio, che indicheremo con  $\varphi(\lambda)$  cessano di esistere, ovvero siamo fuori dal range di sincronizzazione, mentre nell'intervallo  $|\lambda| \leq 1$  è presente sincronizzazione:

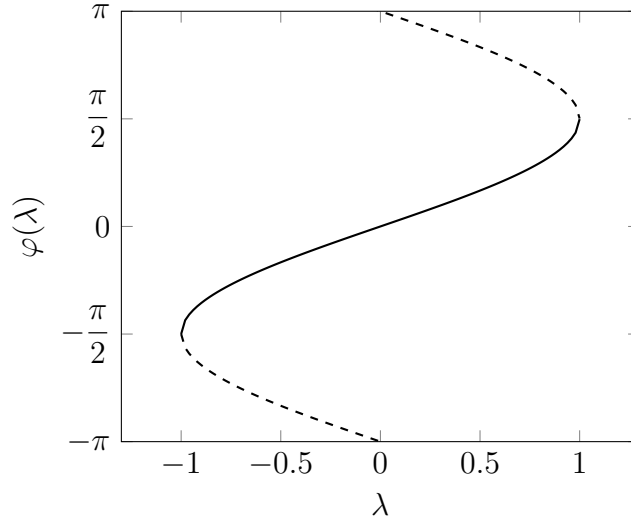


Figura 2.5: Diagramma di biforcazione del problema della lucciola

Quando la dimensione del sistema dinamico in esame supera 1, il numero di possibilità per i fenomeni di biforcazione cresce, dato che sono ora possibili soluzioni come orbite periodiche e cicli limite. Consideriamo a titolo di esempio il seguente sistema dinamico bidimensionale del prim'ordine, che scriveremo dapprima in coordinate polari  $(r, \vartheta)$  al fine di mettere in evidenza il potere attrattivo o repulsivo di alcune soluzioni:

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\vartheta} = \omega + \beta r^2 \end{cases}$$

Immaginiamo che  $\beta, \omega \in \mathbb{R}, \beta, \omega > 0$  e che  $\mu \in \mathbb{R}$  sia il parametro di controllo. Con il cambio di coordinate  $x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta$  perveniamo all'espressione del sistema in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - \omega y - (x^2 + y^2)(x + \beta y) \\ \dot{y} = \omega x + \mu y - (x^2 + y^2)(-\beta x + y) \end{cases}$$

È evidente che l'origine del piano cartesiano è, per ogni valore di  $\mu$ , un punto di equilibrio. Essendo lo Jacobiano in quel punto  $J(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$ , con autovalori  $\lambda_{\pm} = \mu \pm i\omega$ , l'origine è stabile fintanto che  $\mu < 0$  (e anzi, guardando il sistema in coordinate polari è evidente che l'origine è anche asintoticamente stabile: ogni punto dello spazio delle fasi spiraleggia verso  $(0, 0)$ ). Per  $\mu > 0$ , l'origine è diventata instabile, mentre assistiamo alla nascita di un ciclo limite corrispondente alla circonferenza centrata in  $(0, 0)$  e raggio  $\sqrt{\mu}$ .

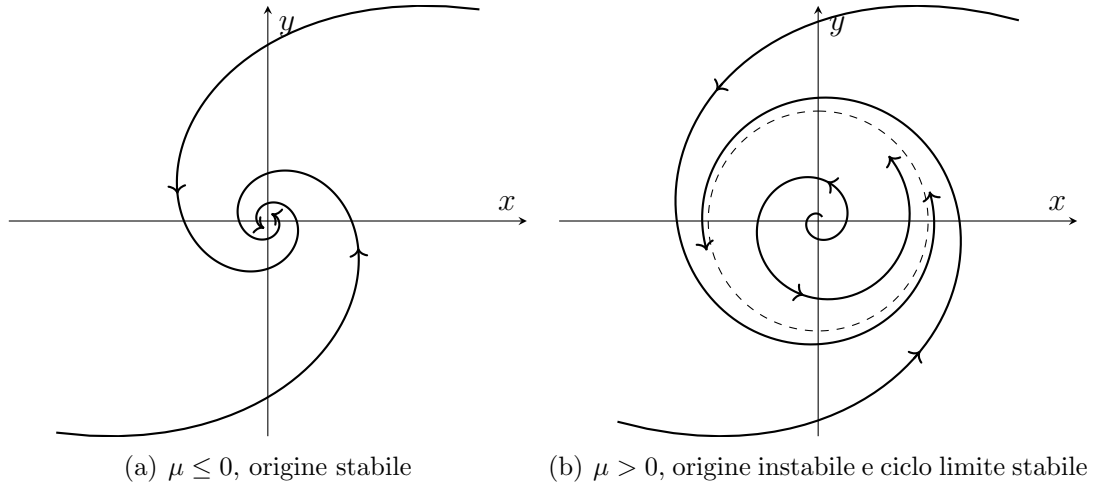


Figura 2.6: Nascita del ciclo limite al variare di  $\mu$

Ogni punto dello spazio delle fasi, eccezion fatta per l'origine, viene attratto da questo ciclo, e tende ad assumere una frequenza costante e pari a  $\omega + \beta\mu$  (e quindi un periodo che tende verso  $2\pi/(\omega + \beta\mu)$ ). Il fenomeno appena descritto è un caso particolare di *Biforcazione di Hopf*, in cui un punto di equilibrio cambia stabilità e allo stesso tempo da origine ad un ciclo limite. Ritorreremo sulla biforcazione di Hopf più avanti.

## 2.2 Biforcazioni nell'ambito degli spazi di Banach

Abbandoniamo per un momento i sistemi dinamici, interessandoci a problemi di biforcazione per equazioni funzionali definite su spazi di Banach. I risultati che illustreremo più avanti, come il Teorema di biforcazione di Hopf e il Teorema del centro di Lyapunov, faranno da collegamento fra i due punti di vista e saranno fondamentali per la nostra analisi del problema ristretto dei tre corpi. Detti pertanto  $X$  ed  $Y$  due spazi di Banach, e  $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ , studieremo equazioni funzionali dipendenti dal parametro reale  $\lambda$ , del tipo:

$$f(\lambda, x) = 0. \quad (2.1)$$

Supporremo sempre che  $f$  sia una funzione di classe  $C^2$ . Una definizione precisa del concetto di punto di biforcazione da una particolare soluzione  $x_0$  (un elemento di  $X$  tale che  $f(\lambda, x_0) = 0$  per ogni  $\lambda$ ) deve catturare l'idea che a partire da essa si "generino" nuove soluzioni diverse da  $x_0$ , variando il parametro  $\lambda$ , in corrispondenza di un particolare valore  $\lambda = \lambda_0$ .

**Definizione 2.2.1** (Punto di biforcazione).  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  è un punto di biforcazione per  $f(\lambda, x) = 0$ , dalla soluzione  $x_0 \in X$  tale che  $f(\lambda, x_0) = 0$  per ogni  $\lambda$ , se esiste una successione  $(\lambda_n, x_n) \in \mathbb{R} \times X$  che soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $f(\lambda_n, x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
2.  $x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
3.  $(\lambda_n, x_n) \rightarrow (\lambda_0, x_0), n \rightarrow +\infty$ .

Vediamo subito una condizione necessaria per l'esistenza di un punto di biforcazione:

**Proposizione 2.2.1.** *Affinché  $\lambda_0$  sia un punto di biforcazione dalla soluzione  $x_0$  per l'equazione  $f(\lambda, x) = 0$ , è necessario che il differenziale parziale  $\partial_x f(\lambda_0, x_0)$  sia non invertibile.*

Se così non fosse, infatti, in virtù del teorema della funzione implicita esisterebbero due intorni  $U_{\lambda_0} \in \mathbb{R}$  e  $U_{x_0} \in X$ , rispettivamente di  $\lambda_0$  e di  $x_0$ , tali che, almeno in  $U_{\lambda_0} \times U_{x_0}$ ,  $f(\lambda, x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ , indipendentemente da  $\lambda$ . Non sarebbe dunque possibile costruire alcuna successione del tipo sopra esposto, e dunque  $\lambda_0$  non sarebbe un punto di biforcazione.  $\square$

Consideriamo adesso un caso particolare, che incontreremo in seguito, ossia quello in cui  $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  e  $f(\lambda, x) = \lambda x - g(x)$ , con  $g \in C^2(X)$ . In questo caso  $\partial_x f(\lambda_0, 0) = \lambda \mathbb{1} - g'(0)$ , per cui necessariamente un punto di biforcazione per questo sistema deve appartenere allo spettro di  $g'(0)$ .

## 2.3 Riduzione di Lyapunov-Schmidt

La tecnica di riduzione di Lyapunov-Schmidt permette di studiare un'equazione non lineare definita su un qualsiasi spazio di Banach e dipendente da un parametro, riducendola localmente (in un intorno di un punto di biforcazione, dove il teorema della funzione implicita non è applicabile) a un sistema di equazioni algebriche, in numero finito e con un numero finito di incognite reali. Per semplicità di notazione, e senza perdita di generalità, supporremo che  $x_0 = 0$ , ossia che la biforcazione avvenga dalla soluzione nulla. Supponiamo, dunque, che  $f \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ , che  $f(\lambda, 0) = 0$  e che  $\lambda_0$  sia un punto di biforcazione per tale equazione. Per semplicità di notazione siano  $L := \partial_x f(\lambda_0, 0)$ ,  $V := \text{Ker}(\partial_x f(\lambda_0, 0))$ ,  $R := \text{Im}(\partial_x f(\lambda_0, 0))$ . Richiediamo inoltre che esistano sottospazi chiusi  $W \subseteq X$  e  $Z \subseteq Y$  soddisfacenti:

$$X = V \oplus W, \text{ per cui } W \cap V = \{0\} \text{ e } \forall x \in X, \exists! v \in V, w \in W \text{ tali che } x = v + w,$$

$$Y = R \oplus Z, \text{ per cui } R \cap Z = \{0\} \text{ e } \forall y \in Y, \exists! r \in R, z \in Z \text{ tali che } y = r + z.$$

Siano  $\Pi_R : Y \rightarrow R$  e  $\Pi_Z : Y \rightarrow Z$  rispettivamente gli operatori di proiezione su  $R$  e su  $Z$ . L'equazione iniziale  $f(\lambda, x) = 0$  è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \Pi_R f(\lambda, v + w) = 0 \\ \Pi_Z f(\lambda, v + w) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ora, poiché  $f(\lambda, x) = f(\lambda, x) + L(x) - L(x) =: L(x) + \varphi(\lambda, x)$ , abbiamo  $f(v + w) = L(w) + \varphi(\lambda, v + w)$ . Applicando l'operatore  $\Pi_R$  a quest'ultima otteniamo:

$$\Pi_R f(v + w) = \Pi_R L(w) + \Pi_R \varphi(\lambda, v + w) = L(w) + \Pi_R \varphi(\lambda, v + w).$$

L'equazione  $\Pi_R f(\lambda, x) = 0$  diviene quindi:

$$\Phi(\lambda, v, w) := L(w) + \Pi_R \varphi(\lambda, v + w) = 0.$$

Derivando parzialmente rispetto a  $w$  otteniamo

$$\partial_w \Phi(\lambda, v, w) = \partial_w L(w) + \partial_w \Pi_R \varphi(\lambda, v + w),$$

da cui:

$$\partial_w \Phi(\lambda, v, w) = L + \Pi_R \partial_x \varphi(\lambda, v + w).$$

Valutando quest'espressione in  $(\lambda_0, 0, 0)$  otteniamo:

$$\partial_w \Phi(\lambda_0, 0, 0) = L + \Pi_R \partial_x \varphi(\lambda_0, 0)$$

Esplicitiamo ora la derivata di  $\varphi$ :

$$\partial_x \varphi(\lambda, x) = \partial_x (f(\lambda, x) - \partial_x f(\lambda_0, 0)(x)),$$

che è chiaramente l'applicazione nulla, quando calcolata in  $(\lambda_0, 0)$ . Abbiamo dunque

$$\partial_w \Phi(\lambda_0, 0, 0) = L = L|_W.$$

Questo significa che la restrizione di  $\partial_w \Phi(\lambda_0, 0, 0)$  al sottospazio  $W$ ,  $\partial_w \Phi(\lambda_0, 0, 0)|_W : W \rightarrow R$  è un'applicazione iniettiva e suriettiva, ed essendo  $R$  chiuso per ipotesi l'applicazione inversa è anch'essa continua da  $R$  a  $W$ . Questo significa che siamo nelle condizioni di poter applicare il Teorema della Funzione Implicita, essendo  $\partial_w \Phi(\lambda_0, 0, 0)|_W \in \text{Iso}(W, R)$ . Esistono pertanto:

1. Un intorno  $\Lambda$  di  $\lambda_0$ ;
2. un intorno  $\mathcal{V} \subseteq V$  di  $v = 0$ ;
3. un intorno  $\mathcal{W} \subseteq W$  di  $w = 0$ ;
4. una funzione  $\gamma : \Lambda \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  di classe  $C^2$ ,

tali per cui le soluzioni di  $\Pi_R f(\lambda, v + w) = 0$  siano tutte e sole quelle del tipo  $(\lambda, v, \gamma(\lambda, v))$ . Questa informazione può essere racchiusa nell'equazione  $w = \gamma(\lambda, v)$ . Sostituendo  $w = \gamma(\lambda, v)$  nell'altra equazione del sistema [\[\\*\]](#), otteniamo la cosiddetta *equazione di biforcazione*:

$$\Pi_Z f(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = 0.$$

Il vantaggio è, come anticipato, il seguente: nel caso che  $v \in \mathbb{R}^p$  e  $z \in \mathbb{R}^q$ , dove  $v \in V$  e  $z \in Z$  sono i vettori definiti alla pagina precedente, l'equazione originale  $f(\lambda, x) = 0$  è equivalente (almeno localmente, ossia in  $\Lambda \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ ) ad un sistema di  $q$  equazioni algebriche nelle  $1 + p$  incognite  $(\lambda, v) \in \Lambda \times \mathcal{V}$ .

**Esempio.** A titolo di esempio di applicazione del metodo di riduzione di Lyapunov-Schmidt supponiamo di voler cercare soluzioni dispari,  $2\pi$ -periodiche e di classe  $C^2$ , ossia soluzioni in  $C_{2\pi, \text{odd}}^2(\mathbb{R})$  della seguente equazione differenziale, dove  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\ddot{u} + (1 - \lambda)u + \lambda u^3 = 0.$$

Possiamo inquadrare il problema come un'equazione funzionale del tipo  $F(\lambda, u) = 0$ , definendo  $F : \mathbb{R} \times C_{2\pi, \text{odd}}^2(\mathbb{R}) \rightarrow C_{2\pi}^0$ ,  $F(\lambda, u(t))(\mathbb{R}) = \ddot{u}(t) + (1 - \lambda)u(t) + \lambda u^3(t)$ . Derivando

rispetto a  $u$  otteniamo  $L := \partial_u F(0, u) = \frac{d^2}{dt^2} + \mathbf{1}$ , operatore il cui nucleo è il sottospazio unidimensionale  $a \sin t$  ( $a \in \mathbb{R}$ ). Cominciamo la ricerca di soluzioni, definendo:

$$\mathbb{X}_k := \text{span}\{\sin kt\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 1, \quad \mathbb{X} := \overline{\bigoplus_{k=1}^{+\infty} \mathbb{X}_k} = C_{2\pi, \text{odd}}^2(\mathbb{R}).$$

Sappiamo di poter scrivere una qualsiasi soluzione mediante il suo sviluppo in serie di Fourier:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k \sin kt, \quad \text{per } w_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 1.$$

Possiamo dunque decomporre la soluzione nel seguente modo, proiettandone una parte su  $\mathbb{X}_1$ , il nucleo di  $L$ :

$$u = u_0 + w = w_1 \sin t + \sum_{k=2}^{+\infty} w_k \sin kt.$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo:

$$\frac{d^2}{dt^2} (u_0 + w) + (1 - \lambda)(u_0 + w) + \lambda(u_0 + w)^3 = 0,$$

e dunque:

$$\ddot{u} + (1 - \lambda)u - \lambda u_0 + \lambda(u_0 + w)^3 = 0.$$

Esplicitando  $u_0$  e  $w$ , otteniamo:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (1 - k^2 - \lambda)w_k \sin kt - \lambda a \sin t + \lambda \left( \sum_{k=1}^{+\infty} w_k \sin kt \right)^3 = 0.$$

Sfruttando il fatto che anche l'immagine di  $F$ , ossia l'insieme  $C_{2\pi, \text{odd}}^0(\mathbb{R})$ , è decomponibile nello stesso modo di  $\mathbb{X}$ , proiettiamo questa equazione sugli stessi due sottospazi di quanto fatto in precedenza. Chiamiamo dunque  $\Pi_Z$  l'operatore di proiezione su  $\mathbb{X}_1$ , e  $\Pi_R$  il proiettore sul suo complemento ortogonale in  $\mathbb{X}$ . Abbiamo dunque rispettivamente l'*equazione di biforcazione*:

$$a - \Pi_Z(a^3 \sin^3 t + 3a^2 \sin^2 t w + 3a \sin t w^2 + w^3) = 0,$$

e per ogni  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$ , l'*equazione di range*:

$$(1 - k^2 - \lambda)w_k + \lambda \Pi_R(a^3 \sin^3 t + 3a^2 \sin^2 t w + 3a \sin t w^2 + w^3) = 0.$$

Grazie al Teorema della Funzione Implicita è possibile esplicitare  $w_k = w_k(\lambda)$  dall'equazione di range, con  $w_k(\lambda) = O(\lambda)$  per  $\lambda \rightarrow 0$ . Guardiamo ora l'equazione di biforcazione: dall'identità  $\sin^3 t = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$  possiamo riscrivere tale relazione come:

$$a - \frac{3}{4}a^3 + \Pi_Z(3a^2 \sin^2 t w + 3a \sin t w^2 + w^3) =: a - \frac{3}{4}a^3 + R(a, w) =: Q(a, w) = 0.$$



Considerando il limite  $\lambda \rightarrow 0, w \rightarrow 0$ , e di conseguenza  $R \rightarrow 0$ , otteniamo:

$$a - \frac{3}{4}a^3 = 0 \implies a = 0 \vee a = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

In particolare abbiamo per esempio  $Q(\sqrt{4/3}, 0) = 0$ . Arriviamo dunque al punto: è possibile esprimere  $a = a(\lambda)$ , almeno in un intorno di  $(a = \sqrt{4/3}, \lambda = 0)$ ? Per il Teorema della Funzione Implicita questo è possibile se  $\partial_a Q(\sqrt{4/3}, 0) \neq 0$ . Quindi, poiché  $\partial_a R(\sqrt{4/3}, 0) = 0$  si ha:

$$\partial_a Q(\sqrt{4/3}, 0) = 1 - \frac{9}{4} \left( \sqrt{\frac{4}{3}} \right)^2 \neq 0,$$

e pertanto esiste una famiglia di soluzioni non banali all'equazione differenziale di partenza con  $\lambda \neq 0$ , che si origina dalla soluzione al problema lineare con  $a = \sqrt{4/3}$ .

## 2.4 I teoremi di biforcazione

Supponiamo di voler investigare l'esistenza di soluzioni periodiche di un sistema dinamico del prim'ordine dipendente da un parametro reale  $\mu$  :

$$\dot{x} = f(\mu, x).$$

Sorge subito un problema: non siamo a conoscenza, a priori, del periodo delle soluzioni (se esistono), per cui quello che faremo è cambiare punto di vista: riscaliamo il tempo di un fattore, a priori incognito ( $t \rightarrow t/\omega, \omega > 0$ ), ma che può essere inserito nel problema sotto forma di un altro parametro, di modo tale che adesso l'indagine riguardi l'esistenza di soluzioni  $2\pi$ -periodiche del sistema dipendente da due parametri:

$$\omega \dot{x} = f(\mu, x).$$

Trovata dunque una soluzione  $2\pi$ -periodica al problema così riformulato, diciamo  $x(t)$ , abbiamo che  $\tilde{x}(t) := x(\omega t)$  è una soluzione  $2\pi/\omega$ -periodica del problema originale. L'obiettivo che ci siamo posti può essere inquadrato come un problema di biforcazione di un'equazione funzionale che coinvolge funzioni periodiche. Impostiamo dunque il problema: siano come sempre  $X$  e  $Y$  due spazi di Banach, e  $f : \mathbb{R}^2 \times X \rightarrow Y$  di classe  $C^2$ . Riformuliamo ora la definizione di punto di biforcazione nel contesto attuale:

**Definizione 2.4.1** (Punto di biforcazione).  $(\omega_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$  è un punto di biforcazione per  $f(\omega, \mu, x) = 0$ , dalla soluzione  $x_0$ , se esiste una successione  $(\omega_n, \mu_n, x_n) \in \mathbb{R}^2 \times X$  che soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $f(\omega_n, \mu_n, x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
2.  $x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
3.  $(\omega_n, \mu_n, x_n) \rightarrow (\omega_0, \mu_0, x_0), n \rightarrow +\infty$ .

Ponendo, in analogia al caso unidimensionale,  $L := \partial_x f(\omega_0, \mu_0, x_0)$ ,  $V := \ker(L)$ ,  $R := \text{Im}(L)$ , consideriamo il caso in cui  $\dim(V) = 2$ ,  $\text{codim}(R) = 2$  e  $R$  sia chiuso. Detti inoltre  $W$  un sottospazio complementare di  $V$  in  $X$ , e  $Z$  un sottospazio complementare di  $R$  in  $Y$ , avremo:

$$X = V \oplus W, \quad Y = Z \oplus R, \quad \dim(Z) = 2.$$

Chiamiamo infine,  $\Pi_Z$  l'operatore di proiezione sul sottospazio  $Z$ , mentre  $\Pi_R$  la proiezione su  $R$ ,  $M := \partial_{\mu x} f(\omega_0, \mu_0, x_0)$ ,  $N := \partial_{\omega x} f(\omega_0, \mu_0, x_0)$ . Riassumeremo tutte queste condizioni con il simbolo  $(*)$ . Il teorema astratto di biforcazione di Hopf ci informa su un insieme di condizioni sufficienti affinché un'equazione funzionale del tipo considerato ammetta punti di biforcazione (nella dimostrazione assumeremo, per semplicità e senza perdita di generalità,  $x_0 = 0$ ):

**Teorema 2.4.1** (Teorema astratto di biforcazione di Hopf). *Sia  $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times X, Y)$  soddisfacente le condizioni  $(*)$ . Supponiamo inoltre che esista un vettore non nullo  $\bar{v} \in V$  tale che  $\Pi_Z M \bar{v}$  e  $\Pi_Z N \bar{v}$  siano linearmente indipendenti in  $Z$ . Allora  $(\omega_0, \mu_0)$  è un punto di biforcazione per  $f(\omega, \mu, x) = 0$  dalla soluzione nulla.*

Sia infatti  $f(\omega, \mu, u) = 0$  l'equazione in esame. Decomponiamo  $u$  nella sua proiezione su  $V$  e quella su  $W$ , scrivendo quindi  $u = v + w$ . Analogamente, decomponiamo l'immagine di  $f$  proiettando sui due sottospazi  $Z$  e  $R$ , ottenendo dunque il sistema equivalente:

$$\begin{cases} \Pi_R f(\omega, \mu, v + w) = 0 \\ \Pi_Z f(\omega, \mu, v + w) = 0 \end{cases}$$

La prima delle due equazioni, ossia l'equazione di range, è risolvibile localmente, in un intorno di  $(\omega_0, \mu_0, 0)$ , mediante il Teorema della Funzione Implicita. Dopo aver notato che, come conseguenza del Teorema risultano  $\psi(\omega_0, \mu_0, 0) = 0$  e  $\partial_v \psi(\omega_0, \mu_0, 0) = 0$ , sostituiamo nell'altra equazione del sistema ottenendo:

$$\Pi_Z f(\omega, \mu, v + \psi(\omega, \mu, v)) = 0.$$

Cerchiamo ora soluzioni  $v$  all'equazione, della forma  $v = s\bar{v}$ , con  $\bar{v}$  un vettore non nullo di  $V$ . Viene così definita una funzione  $h(\omega, \mu, s) = \Pi_Z f(\omega, \mu, s\bar{v} + \psi(\omega, \mu, s\bar{v}))$ , e l'equazione da studiare diviene  $h(\omega, \mu, s) = 0$ . Notiamo che  $h(\omega, \mu, 0) = 0$ , e diciamo quindi che per una certa funzione  $\chi$ ,  $h(\omega, \mu, s) = s\chi(\omega, \mu, s)$ , ossia “desingularizziamo” l'equazione. Dato che  $\chi(\omega, \mu, 0) = \partial_s h(\omega, \mu, 0)$ , otteniamo, derivando l'espressione esplicita di  $h$  e calcolando in  $(\omega_0, \mu_0, 0)$ , che:

$$\chi(\omega_0, \mu_0, 0) = \Pi_Z \partial_u f(\omega_0, \mu_0, 0)(\bar{v}) = \Pi_Z L \bar{v} = 0.$$

Adesso, per far vedere che la lineare indipendenza dei due vettori nominati nelle ipotesi sia una condizione sufficiente per l'esistenza di un punto di biforcazione, deriviamo rispetto a  $\mu$  e rispetto a  $\omega$  la funzione  $\chi$ . In particolare, otteniamo le due seguenti relazioni:

$$\partial_\mu \chi(\omega_0, \mu_0, 0) = M \bar{v}, \quad \partial_\omega \chi(\omega_0, \mu_0, 0) = N \bar{v}.$$

É quindi evidente che se  $M \bar{v}$  e  $N \bar{v}$  sono linearmente indipendenti, lo Jacobiano  $2 \times 2$  di  $\chi$  rispetto alle variabili  $\mu$  e  $\omega$  è invertibile in un intorno di  $(\omega_0, \mu_0, 0)$ , e per il Teorema della

Funzione Implicita questo implica che, localmente, l'equazione  $\chi(\omega, \mu, s) = 0$  può essere risolta in termini di due curve  $\omega(s)$  e  $\mu(s)$ , definite in un intorno di  $s = 0$ , e tali che  $\omega(0) = \omega_0$ ,  $\mu(0) = \mu_0$  e  $\chi(\omega(s), \mu(s), s) = 0$ . Quest'ultima relazione si traduce in termini di  $f$  nella seguente:

$$\Pi_Z f(\omega(s), \mu(s), s\bar{v} + \psi(\omega(s), \mu(s), s\bar{v})) = 0.$$

$(\omega_0, \mu_0)$  è dunque un punto di biforcazione poiché  $u(s) = s\bar{v} + \psi(\omega(s), \mu(s), s\bar{v})$  è una famiglia di soluzioni non banali (basta notare che  $u$  dipende in modo non banale da  $s$ , poiché per esempio  $u'(0) = \bar{v}$ ) dell'equazione originale, che al tendere di  $s$  a 0 tendono a  $\psi(\omega(0), \mu(0), 0) = 0$ .  $\square$

Consideriamo dunque, per  $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  il sistema autonomo,  $n$ -dimensionale e del prim'ordine:

$$\dot{x} = f(\mu, x),$$

e supponiamo di conoscerne un punto di equilibrio  $x_0$ , ossia di sapere che  $f(\mu, x_0) = 0$ ,  $\forall \mu \in \mathbb{R}$ . Ci chiediamo intuitivamente se attorno a  $x_0$  si originino soluzioni periodiche al variare di  $\mu$  (più avanti formuleremo la domanda in maniera più precisa). Definiamo quindi un nuovo parametro reale  $\omega > 0$ , e studiamo il sistema:

$$\omega \dot{x} = f(\mu, x),$$

di cui siamo interessati a trovare soluzioni  $2\pi$ -periodiche. A questo punto effettuiamo il collegamento fra biforcazioni di soluzioni periodiche e biforcazioni di equazioni funzionali infinito-dimensionali, facendo le seguenti posizioni:

$$X := \{u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid u(t + 2\pi) = u(t)\}, \quad Y := \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid u(t + 2\pi) = u(t)\}$$

$$F : \mathbb{R}^2 \times X \rightarrow Y, \quad F(\omega, \mu, u) = \omega \dot{u} - f(\mu, u),$$

di modo da stabilire una connessione fra la biforcazione di soluzioni di  $F = 0$  e la nascita di soluzioni periodiche di  $\dot{x} = f(\mu, x)$ . Se, infatti,  $(\omega_0, \mu_0)$  è un punto di biforcazione per il sistema  $F = 0$ , allora esistono delle successioni  $\omega_n, \mu_n$  ed  $x_n$  tali che  $\tilde{x}_n(t) := x_n(\omega_n t)$  sia una successione di soluzioni  $2\pi/\omega_n$ -periodiche del sistema originale, che si "biforcano" dalla soluzione  $\tilde{x}_0$ . Ricerchiamo dunque biforcazioni per l'equazione  $F = 0$ . Il sistema linearizzato  $\partial_x F(\omega, \mu, x_0)(x) = 0$  è:

$$\omega \dot{x} - \partial_x f(\mu, x_0)(x) = 0.$$

Per semplificare le notazioni, porremo  $A_\mu := \partial_x f(\mu, x_0)$ . Facciamo ora vedere che, se sono soddisfatte alcune ipotesi sugli autovalori di  $A_0 := \partial_x f(\mu_0, x_0)$ , siamo nelle ipotesi di applicabilità del teorema astratto di biforcazione di Hopf:

**Lemma 2.4.1.** *Se  $A_0$  è non singolare, ha una coppia di autovalori immaginari coniugati  $\pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ , e non ha altri autovalori della forma  $ik\omega_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , allora  $\dim(V) = 2$ ,  $\text{codim}(R) = 2$  e  $R$  è chiuso.*

Notiamo esplicitamente che stiamo parlando della dimensione *reale* degli spazi vettoriali  $R$  e  $V$ . Ricordiamo che  $L = \partial_x F(\omega_0, \mu_0, x_0)$ ,  $V := \ker(L)$ ,  $R := \text{Im}(L)$ . Per determinare la dimensione del nucleo di  $L$  cerchiamo soluzioni  $2\pi$ -periodiche di:

$$\omega_0 \dot{x} - A_0 x = 0.$$

Sia ora  $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k e^{ikt}$ , con  $x_k \in \mathbb{C}^n$  e  $x_{-k} = x_k^*$ . Sostituendo nell'equazione otteniamo:

$$(ik\omega_0 \mathbb{1} - A_0)x_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La matrice  $(ik\omega_0 \mathbb{1} - A_0)$  è invertibile fintanto che  $k \neq \pm 1$ , per cui  $x_k = 0$ ,  $\forall k \neq \pm 1$ . Negli ultimi due casi, abbiamo:

$$(\pm i\omega_0 \mathbb{1} - A_0)x_{\pm 1} = 0.$$

Ora, per ipotesi  $\pm i\omega_0$  sono entrambi autovalori semplici di  $A_0$ . Dato un vettore  $\zeta \in \mathbb{C}^n$  che genera  $\ker(i\omega_0 \mathbb{1} - A_0)$ ,  $\zeta^*$  genererà  $\ker(-i\omega_0 \mathbb{1} - A_0)$ . Questo significa che  $V$  è generato dalle funzioni  $\zeta e^{it}$  e  $\zeta^* e^{-it}$ , per cui le soluzioni reali e  $2\pi$ -periodiche dell'equazione in esame saranno date da:

$$x(t) = \alpha \zeta e^{it} + \alpha^* \zeta^* e^{-it}, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

e dunque la dimensione reale di  $V$  è 2. Ora, consideriamo l'equazione  $Lx = y$ , con  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Espandiamo nuovamente  $x$  e  $y$  in serie di Fourier, ottenendo:

$$(ik\omega_0 \mathbb{1} - A_0)x_k = y_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Di queste infinite equazioni, hanno soluzione unica quelle con  $k \neq \pm 1$ . Ora, poiché per ogni  $k \neq 0, \pm 1$ , si ha  $(ik\omega_0 \mathbb{1} - A_0)^{-1} = \frac{1}{ik\omega_0} \mathbb{1} + O(1/k^2)$  per  $k \rightarrow +\infty$ , si ottiene il seguente andamento per i coefficienti di Fourier di  $x$ :

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq \pm 1}} (ik\omega_0 \mathbb{1} - A_0)^{-1} y_k e^{ikt},$$

per cui  $x \in X$ , per un ragionamento analogo a quello utilizzato nell'Esempio 2.2.4. Ora, chiamiamo con  $\Pi$  e  $\Pi^*$  le applicazioni di proiezione, rispettivamente, sui sottospazi generati da  $\zeta$  e  $\zeta^* \in \mathbb{C}^n$ . Consideriamo l'equazione:

$$(\pm i\omega_0 - A_0)x_{\pm 1} = y_{\pm 1}.$$

Questa ammette soluzioni se e solo se  $\Pi(y_1) = \Pi^*(y_{-1}) = 0$ . Da questo deduciamo che  $y \in W$  se e solo se  $\Pi(y_1) = \Pi^*(y_{-1}) = 0$ , per cui  $\text{codim}(W) = 2$ .

Sia ora  $\bar{v} := \zeta e^{it} + \zeta^* e^{-it}$ . Vogliamo determinare un'espressione esplicita dei seguenti vettori, e cercare una condizione per cui siano linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ :

$$\eta := \Pi_Z \partial_{\omega x} F(\omega_0, \mu_0, x_0) \bar{v}, \quad \nu := \Pi_Z \partial_{\mu x} F(\omega_0, \mu_0, x_0) \bar{v}.$$

Per quanto riguarda il primo fra essi, poiché  $\partial_x F(\omega, \mu, x_0) \bar{v} = \omega \dot{\bar{v}} - A_\mu \bar{v}$  si ha, derivando rispetto a  $\omega$ ,  $\partial_{\omega x} F(\omega_0, \mu_0, x_0) \bar{v} = \dot{\bar{v}}$ , e dunque:

$$\eta = i\zeta e^{it} - i\zeta^* e^{-it}.$$

Premettiamo alcune considerazioni prima di derivare rispetto a  $\mu$ . Sappiamo che, per  $\mu = \mu_0$ ,  $A_\mu$  ammette due autovalori semplici  $\pm i\omega_0$ . Al variare di  $\mu$  e dunque della matrice del sistema linearizzato, esiste (si veda, ad esempio, [11]) una curva di classe  $C^1$  (in senso reale) di autovalori passante per  $i\omega_0$  non appena  $\mu = \mu_0$ :

$$\lambda : U_{\mu_0} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu).$$

Stiamo dicendo, in sostanza, che  $\alpha, \beta \in C^1(U_{\mu_0}, \mathbb{R})$  e che  $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) = \omega_0$ . Analogamente, essendo  $i\omega_0$  un autovalore semplice, esisterà anche una curva  $\mu \mapsto \zeta(\mu)$  di autovettori passante per l'autovettore corrispondente all'autovalore  $i\omega_0$ , ossia  $\zeta$ , di classe  $C^1$  e con le seguenti proprietà:

1.  $\zeta(\mu_0) = \zeta$ ;
2.  $A_\mu \zeta(\mu) = \lambda(\mu) \zeta(\mu)$ .

Deriviamo adesso rispetto a  $\mu$  l'espressione 2., al fine di determinare la forma esplicita del vettore  $\nu := P \partial_{\mu x} F(\omega_0, \mu_0, x_0) \bar{v}$ . Poniamo per semplicità  $A'_{\mu_0} := \frac{d}{dt} A_\mu|_{\mu=\mu_0}$ ,  $\zeta'(\mu_0) := \frac{d}{dt} (\zeta(\mu))_{\mu=\mu_0}$ ,  $\lambda'(\mu_0) := \frac{d}{dt} (\lambda(\mu))_{\mu=\mu_0}$  e deriviamo rispetto a  $\mu$  entrambi i membri della seguente identità:

$$A_\mu \zeta = A_\mu (\zeta - \zeta(\mu)) + A_\mu \zeta(\mu) = A_\mu (\zeta - \zeta(\mu)) + \lambda(\mu) \zeta(\mu).$$

Si ottiene dunque, calcolando la derivata in  $\mu_0$ :

$$A'_{\mu_0} \zeta = A'_{\mu_0} (\zeta - \zeta(\mu_0)) - A_0 \zeta'(\mu_0) + \lambda'(\mu_0) \zeta(\mu_0) + \lambda(\mu_0) \zeta'(\mu_0)$$

Ricordando ora che  $\zeta(\mu_0) = \zeta$ , e che  $\lambda(\mu_0) = i\omega_0$  otteniamo:

$$A'_{\mu_0} \zeta = \lambda'(\mu_0) \zeta + (i\omega_0 \mathbf{1} - A_0) \zeta'(\mu_0).$$

Facendo agire il proiettore  $\Pi$  su entrambi i membri abbiamo:

$$\Pi A'_{\mu_0} \zeta = \Pi \lambda'(\mu_0) \zeta + \Pi (i\omega_0 \mathbf{1} - A_0) \zeta'(\mu_0).$$

Ora,  $\Pi(\zeta) = \zeta$ , mentre  $\Pi$  manda in zero qualsiasi vettore nell'immagine di  $(i\omega_0 \mathbf{1} - A_0)$ , per cui:

$$\Pi A'_{\mu_0} \zeta = \lambda'(\mu_0) \zeta,$$

mentre con un ragionamento analogo, si ottiene:

$$\Pi^* A'_{\mu_0} \zeta = (\lambda'(\mu_0))^* \zeta.$$

Con questi risultati a disposizione, possiamo finalmente calcolare il vettore  $\nu$ . Partiamo dalla seguente espressione:

$$\partial_{\mu x} F(\omega_0, \mu_0, x_0) \bar{v} = \partial_\mu [i\omega(\zeta e^{it} - \zeta^* e^{-it}) - A_\mu (\zeta e^{it} + \zeta^* e^{-it})]_{\mu=\mu_0}.$$

Derivando, si ottiene:

$$\partial_{\mu x} F(\omega_0, \mu_0, x_0) \bar{v} = -A'_{\mu_0} (\zeta e^{it} + \zeta^* e^{-it}).$$

Ora, per applicare l'operatore di proiezione  $\Pi_Z$  ad entrambi i membri, ricordiamo che:

$$\Pi_Z u = \Pi(u_1)e^{it} + \Pi^*(u_{-1})e^{-it},$$

e considerando la definizione del vettore  $\nu$ , abbiamo:

$$\nu = -\Pi(A'_{\mu_0}\zeta)e^{it} - \Pi^*(A'_{\mu_0}\zeta^*)e^{-it} = -\lambda'(\mu_0)\zeta e^{it} - (\lambda'(\mu_0))^*\zeta^* e^{-it}.$$

Ponendo  $\lambda'(\mu_0) = \alpha'(\mu_0) + i\beta'(\mu_0)$ , otteniamo, infine:

$$\begin{aligned} \nu &= -(\alpha'(\mu_0) + i\beta'(\mu_0))\zeta e^{it} - (\alpha'(\mu_0) + i\beta'(\mu_0))^*\zeta^* e^{-it} = \\ &= -\alpha'(\mu_0)(\zeta e^{it} + \zeta^* e^{-it}) - i\beta'(\mu_0)(\zeta e^{it} - \zeta^* e^{-it}). \end{aligned}$$

Eccoci pervenuti finalmente alle espressioni dei vettori  $\eta$  e  $\nu$ :

$$\eta = i\zeta e^{it} - i\zeta^* e^{-it}, \quad \nu = -\alpha'(\mu_0)(\zeta e^{it} + \zeta^* e^{-it}) - i\beta'(\mu_0)(\zeta e^{it} - \zeta^* e^{-it}).$$

Questi due vettori sono linearmente indipendenti (su  $\mathbb{R}$ ) se e solo se  $\alpha'(\mu_0) \neq 0$ . Ecco quindi trovata la condizione cercata, ossia il fatto che quando la curva di autovalori  $\lambda(\mu)$  attraversa l'asse immaginario nel punto  $(0, i\omega_0)$  in corrispondenza di  $\mu_0$ , lo faccia con parte reale trasversa (cioè, appunto, con derivata prima non nulla).  $\square$

Le considerazioni fatte finora si possono riassumere nel seguente Teorema:

**Teorema 2.4.2** (Teorema di biforcazione di Hopf). *Sia  $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  un campo vettoriale dipendente da un parametro reale  $\mu$ , che ammetta la soluzione  $x_0$  tale che  $f(\mu, x_0) = 0, \forall \mu \in \mathbb{R}$ . Si supponga che, per  $\mu = \mu_0$ , l'operatore  $A_0$  sia non singolare, con una coppia di autovalori immaginari coniugati  $\pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ , e che non ammetta altri autovalori del tipo  $ik\omega_0, k \in \mathbb{Z}$ . Si assuma inoltre per la curva di autovalori di  $A_\mu$  la condizione di trasversalità prima discussa, ossia  $\alpha'(\mu_0) \neq 0$ . Allora da  $\mu_0$  si ha biforcazione di soluzioni periodiche per il sistema  $\dot{x} = f(\mu, x)$ , con periodo vicino a  $2\pi/\omega_0$ . Più precisamente esiste un intorno  $I \subseteq \mathbb{R}$  di  $0$ , due funzioni  $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}_+, s \mapsto \omega(s)$ ,  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \mu(s)$  entrambe di classe  $C^1$ , e una famiglia  $u_s$  di soluzioni periodiche non costanti del sistema  $\dot{u} = f(\mu, u)$ , tali che:*

1.  $\omega(s) \rightarrow \omega_0$ , e  $\mu(s) \rightarrow \mu_0$  per  $s \rightarrow 0$ ;
2.  $u_s$  è periodica di periodo  $T_s = 2\pi/\omega(s)$ ;
3. l'ampiezza dell'orbita di  $u_s$  tende a 0 per  $s \rightarrow 0$ .
4.  $u_s \rightarrow x_0$  per  $s \rightarrow 0$ .

Consideriamo adesso un esempio di applicazione del teorema di biforcazione di Hopf, ossia ricercheremo la genesi di soluzioni periodiche dell'equazione di Van der Pol, che descrive un oscillatore unidimensionale con smorzamento non lineare ( $\mu$  è un parametro reale) la cui dinamica è governata dalla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{x} - (\mu - 3x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Trasformiamola in un sistema del primo ordine: definendo  $y = \dot{x} - \mu x + x^3$  abbiamo  $\dot{y} = \ddot{x} - \mu \dot{x} + 3x^2 \dot{x}$ , per cui l'equazione di Van der Pol è equivalente al sistema del prim'ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -x \end{cases} .$$

Il sistema linearizzato corrispondente è:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mu x \\ \dot{y} = -x \end{cases} .$$

La matrice  $A_\mu$  in questo caso è  $A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , che in  $\mu = 0$  ha esattamente autovalori  $\pm i$ . Inoltre, in un intorno di  $\mu = 0$ , gli autovalori della matrice  $A_\mu$  appartengono alla curva:

$$\lambda_\pm(\mu) = \frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}i\sqrt{4 - \mu^2},$$

per cui è valida anche la condizione di trasversalità, essendo  $\alpha'(0) = 1/2$ . Il Teorema di Biforcazione di Hopf [2.4.2](#) è pertanto applicabile, con  $\mu_0 = 0$  e  $\omega_0 = 1$ , e dunque in corrispondenza di  $\mu = 0$  si ha la genesi di traiettorie periodiche attorno all'origine con periodo tendente a  $2\pi$ . Facciamo adesso vedere esplicitamente che in corrispondenza di  $\mu_0 = 0$ ,  $\omega_0 = 1$  e la soluzione nulla si ha un punto di biforcazione e dunque biforcazione di soluzioni periodiche. Immettiamo nel problema dunque il parametro  $\omega$ , o equivalentemente riscaldiamo il tempo, in modo da pervenire al seguente sistema dinamico, di cui vogliamo determinare la genesi di soluzioni  $2\pi$ -periodiche:

$$\begin{cases} \omega \dot{x} = y + \mu x - x^3 \\ \omega \dot{y} = -x \end{cases} .$$

Definendo  $u(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , abbiamo:

$$F(\omega, \mu, u) := \omega \dot{u} - \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

e quindi secondo le solite definizioni,  $L := \partial_u F(1, 0, 0) = \partial_t - A_0$ . Applichiamo dunque una riduzione di tipo Lyapunov-Schmidt all'equazione  $F(\omega, \mu, u) = 0$ , espandendo  $u$  in serie di Fourier e esplicitando la sua decomposizione sul nucleo di  $L$  e sul suo complementare. Per  $u_k \in \mathbb{C}^2$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , abbiamo:

$$V = \left\{ a \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} + a^* \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it}, \quad a \in \mathbb{C} \right\}$$

$$W = \left\{ b \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} + b^* \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it} + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq \pm 1}} u_k e^{ikt}, \quad b \in \mathbb{C}, u_k \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e^{ikt} = v(t) + w(t), \quad \text{con } v \in V, w \in W.$$

Proiettando adesso la stessa equazione  $F(\omega, \mu, u) = 0$  sul sottospazio generato da  $e^{ikt}$  otteniamo,  $\forall k \in \mathbb{Z}, k \neq \pm 1$ :

$$ik\omega u_k = A_\mu u_k - \begin{pmatrix} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} \\ 0 \end{pmatrix} =: A_\mu u_k - N_k,$$

e quindi:

$$(ik\omega \mathbf{1} - A_\mu)u_k = -N_k.$$

Se consideriamo il sistema di tutte le equazioni con  $k \neq \pm 1$  abbiamo la prima delle due parti dell'*equazione di range*, nella quale per il Teorema della Funzione Implicita possiamo esprimere ogni  $u_k$  come funzione di  $(\omega, \mu, u_1)$ , ossia di  $(\omega, \mu, a, b)$ . Adesso si tratta di esprimere  $b$  in funzione di  $a$ , per concludere la discussione pertinente all'equazione di range. Sia dunque  $k = 1$ , e consideriamo la restrizione di  $L$  al corrispondente sottospazio. La matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica è  $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ , per cui è possibile decomporre lo spazio vettoriale  $\mathbb{C}^2$  come:

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \text{span} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \text{span} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =: \{ \text{span}(\bar{v}) \} \oplus \{ \text{span}(\bar{w}) \} = \ker L \oplus \text{Im } L,$$

Scrivendo dunque  $u_1$  come  $u_1 = a\bar{v} + b\bar{w}$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$ , la restrizione dell'equazione originale al sottospazio  $k = 1$  diviene:

$$(i\omega \mathbf{1} - A_\mu)(a\bar{v} + b\bar{w}) = -N_1.$$

proiettando questa equazione su  $\text{Im } L$ , ossia moltiplicando ambo i membri a sinistra per  $\bar{w}^*$ , otteniamo:

$$\bar{w}^*[(i\omega \mathbf{1} - A_\mu)(a\bar{v} + b\bar{w}) + N_1] = 0.$$

Ora, avendo posto:

$$(i\omega \mathbf{1} - A_\mu) = (i\mathbf{1} - A_0) + (i(\omega - 1)\mathbf{1} - (A_\mu - A_0)) =: (i\mathbf{1} - A_0) + B(\omega, \mu),$$

e notando che  $B = O(|\omega - 1| + |\mu|)$  per  $(\omega, \mu) \rightarrow (1, 0)$ , e che quindi in particolare  $B(1, 0)$  è la matrice nulla, abbiamo:

$$\bar{w}^*[(i\mathbf{1} - A_0) + B(\omega, \mu)](a\bar{v} + b\bar{w}) + N_1 = 0,$$

e quindi, ricordando le definizioni di  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$ , e che  $(i\mathbf{1} - A_0)\bar{w} = 2i\bar{w}$ , l'equazione diventa:

$$a\bar{w}^*B\bar{v} + b(2i + \bar{w}^*B\bar{w}) + \bar{w}^*N_1 = 0.$$



Scriviamo questa relazione come:

$$b = -\frac{\bar{w}^* N_1 + a\bar{w}^* B\bar{v}}{(2i + \bar{w}^* B\bar{w})}.$$

Prendendo parte reale e parte immaginaria di entrambi i membri, e notando che  $(2i + \bar{w}^* B\bar{w}) \rightarrow 2i$  per  $(\omega, \mu) \rightarrow (1, 0)$ , concludiamo grazie al Teorema della Funzione Implicita che  $b$  può essere espresso localmente in funzione di  $(\omega, \mu, a)$ , in un intorno di  $(1, 0, 0)$ . Inoltre, sempre da questa relazione abbiamo  $|b| \sim |a|(|\omega - 1| + |\mu|)$  per  $(\omega, \mu, a) \rightarrow (1, 0, 0)$ , per cui in particolare  $b \rightarrow 0$  per  $a \rightarrow 0$ . Torniamo ora all'equazione originale e proiettiamo su  $\ker L$  moltiplicando a sinistra entrambi i membri per  $\bar{v}^*$ , pervenendo all'equazione di biforcazione, in cui adesso  $b = b(\omega, \mu, a)$  :

$$\bar{v}^* [(i\mathbf{1} - A_0) + B(\omega, \mu)](a\bar{v} + b\bar{w}) + N_1 = 0,$$

ragionando in modo analogo a quanto fatto in precedenza, otteniamo:

$$a\bar{v}^* B\bar{v} + b\bar{v}^* B\bar{w} + \bar{v}^* N_1 = 0.$$

Ora, poiché  $b\bar{v}^* B\bar{w} = |a|O((|\mu| + |\omega - 1|)^2)$  e  $\bar{v}^* N_1 = 0(a^3)$  per  $(\omega, \mu, a) \rightarrow (1, 0, 0)$ , dividendo entrambi i membri dell'equazione per  $a$  (desingularizzando) otteniamo:

$$\bar{v}^* B\bar{v} + O((|\mu| + |\omega - 1|)^2) + o(a^2) = 0.$$

Verifichiamo che lo Jacobiano rispetto a  $\omega$  e  $\mu$  sia invertibile in  $a = 0$ . A tal fine esprimeremo l'equazione sui complessi come due equazioni sui reali, esplicitando dapprima l'espressione di  $\bar{v}^* B\bar{v}$  :

$$\bar{v}^* B\bar{v} = \begin{pmatrix} i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(\omega - 1) - \mu & 0 \\ 0 & i(\omega - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = 2i(\omega - 1) - \mu.$$

A questo punto, sostituendo nell'equazione desingularizzata, otteniamo

$$2i(\omega - 1) - \mu + O((|\mu| + |\omega - 1|)^2) + o(a^2) = 0,$$

e prendendo la parte reale e immaginaria in entrambi i membri:

$$\begin{cases} \mu = -\Re\{O((|\mu| + |\omega - 1|)^2) + o(a^2)\} \\ \omega = 1 + \frac{1}{2}\Im\{O((|\mu| + |\omega - 1|)^2) + o(a^2)\} \end{cases}.$$

Da queste equazioni, per il Teorema della Funzione Implicita, è possibile esprimere  $\mu$  e  $\omega$  in termini di  $a$ , in un intorno di  $(\omega, \mu, a) = (1, 0, 0)$ . Abbiamo dunque costruito una curva di soluzioni  $u(a)$ , di parametri  $\mu(a) \rightarrow 0$  e di frequenze  $\omega(a) \rightarrow 1$  per  $a \rightarrow 0$ , come previsto dal Teorema di Biforcazione di Hopf.

Arriviamo adesso al risultato finale della presente discussione, che concerne sistemi del primo ordine:

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

e in particolare soluzioni periodiche oscillanti attorno ad un punto di equilibrio  $x_0$  del sistema. Condizione necessaria affinché esistano orbite chiuse attorno a  $x_0$  è che  $A$  possieda due autovalori immaginari coniugati  $\pm i\omega_0$ . Se, infatti, tutti i gli autovalori hanno parte reale non nulla, allora  $x_0$  è, a seconda dei segni delle parti reali, asintoticamente stabile nel passato o nel futuro, e quindi in entrambi i casi non potrebbe esistere una successione di soluzioni periodiche con le proprietà richieste. La condizione sopra esposta non è tuttavia sufficiente a garantire l'esistenza di traiettorie periodiche. Si consideri infatti il seguente sistema dinamico bidimensionale:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases} .$$

Nonostante la matrice del sistema linearizzato, calcolata nell'origine, abbia autovalori  $\pm i$ , passando a coordinate polari è evidente che  $\frac{d}{dt}(r^2) = -2r^2$ , e pertanto l'origine è un punto asintoticamente stabile che attrae tutto il piano delle fasi. Non sono dunque possibili traiettorie periodiche all'infuori di quella banale. Ciò che è stato scoperto da Lyapunov, e ciò che rappresenta il contenuto del Teorema del Centro di Lyapunov, è una condizione sufficiente affinché esistano, invece, questi tipi di traiettorie, e questa condizione ha a che fare con l'esistenza di un certo integrale primo del moto, una funzione  $\mathcal{K} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  che si mantiene costante lungo le soluzioni, ossia tale che se  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , allora  $\mathcal{K}(x(t)) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Ricordiamo che questa condizione è verificata se e solo se  $f(x(t)) \cdot \nabla \mathcal{K}(x(t)) = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , come si ottiene semplicemente derivando rispetto al tempo l'identità  $\mathcal{K}(x(t)) = a$ . Come conseguenza di questo fatto, abbiamo che il prodotto scalare  $f(x) \cdot \nabla \mathcal{K}(x)$  è identicamente nullo per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Premettiamo ora un lemma:

**Lemma 2.4.2.** *Sia  $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , e consideriamo il sistema, possedente integrale primo del moto  $\mathcal{K}$ :*

$$\dot{x} = f(x),$$

e il sistema “modificato”:

$$\dot{x} = f(x) + \mu \nabla \mathcal{K}(x), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Se  $x(t)$  è una soluzione periodica, di periodo  $T$ , del sistema “modificato”, per un qualche  $\mu \in \mathbb{R}$ , allora è anche soluzione periodica, di stesso periodo  $T$ , del sistema originale.

Sia infatti  $u(t)$  una soluzione  $T$ -periodica del sistema “modificato”, per un qualche  $\mu \neq 0$  in modo da escludere il caso banale. Vogliamo dimostrare che  $\nabla \mathcal{K}(u(t)) = 0$  per tutti i tempi. Abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(u(t)) = (f(u(t)) + \mu \nabla \mathcal{K}(u(t))) \cdot \nabla \mathcal{K}(u(t)) = f(u(t)) \cdot \nabla \mathcal{K}(u(t)) + \mu |\nabla \mathcal{K}(u(t))|^2.$$

Essendo  $\mathcal{K}$  un integrale primo del moto per il sistema originale, per quanto detto in precedenza il prodotto scalare è identicamente nullo, per cui abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(u(t)) = \mu |\nabla \mathcal{K}(u(t))|^2,$$

un termine che è nullo se  $u(t)$  è una soluzione periodica. Infatti, supponendo senza perdita di generalità  $\mu > 0$ , si ottiene che  $\mathcal{K}(u(t))$  è non decrescente in  $t$ . Essendo però  $u$  periodica, si ha  $\mathcal{K}(u(t+T)) = \mathcal{K}(u(t))$ , per cui il gradiente di  $\mathcal{K}$  deve essere identicamente nullo. Da questo segue che  $u(t)$  è soluzione anche del sistema originale.  $\square$

## 2.5 Il Teorema del Centro di Lyapunov

Eccoci dunque arrivati al Teorema del centro di Lyapunov, che esprime una condizione sufficiente, che coinvolge un integrale primo del moto, per l'esistenza di biforcazione di soluzioni periodiche da un punto di equilibrio di un sistema del prim'ordine. Questo teorema, come anticipato, farà da ponte fra i teoremi di biforcazione e la nostra analisi del problema dei tre corpi:

**Teorema 2.5.1** (Teorema del Centro di Lyapunov). *Sia  $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tali per cui  $f(x_0) = 0$ . Detto  $A = df_{x_0}$  lo Jacobiano di  $f$  calcolato in  $x_0$ , supponiamo che  $A$  sia invertibile, con una coppia di autovalori semplici, immaginari coniugati  $\pm i\omega_0$ , e che non possieda altri autovalori del tipo  $ik\omega_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Supponiamo infine che  $\mathcal{K} \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  sia un integrale primo del moto per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , e che  $\mathcal{H}\mathcal{K}_{x_0}$ , ossia l'Hessiano di  $\mathcal{K}$  calcolato in  $x_0$ , sia non singolare. Allora il sistema  $\dot{x} = f(x)$  possiede piccole oscillazioni attorno a  $x_0$ . Più precisamente esiste un intorno  $I \subseteq \mathbb{R}$  di 0, e  $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $s \mapsto \omega(s)$  di classe  $C^1$ , e una famiglia  $u_s$  di soluzioni periodiche non costanti del sistema  $\dot{u} = f(u)$ , tali che:*

1.  $\omega(s) \rightarrow \omega_0$  per  $s \rightarrow 0$ ;
2.  $u_s$  è periodica di periodo  $T_s = 2\pi/\omega(s)$ ;
3. l'ampiezza dell'orbita di  $u_s$  tende a 0 per  $s \rightarrow 0$ .
4.  $u_s \rightarrow x_0$  per  $s \rightarrow 0$ .

Grazie al Lemma [2.4.2](#) possiamo ricondurre il nostro studio all'analisi del sistema “modificato”, ossia alla ricerca di biforcazioni di soluzioni periodiche dal sistema:

$$\dot{x} = f(x) + \mu \nabla \mathcal{K}(x).$$

Mostriamo innanzitutto che  $x_0$  è un punto di equilibrio anche per il sistema modificato. Ricordiamo che, come discusso in precedenza, dato che  $\mathcal{K}$  è un integrale primo del moto per il sistema originale si ha,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(x) \cdot \nabla \mathcal{K}(x) = 0.$$

Anche il differenziale di questa applicazione  $f(x) \cdot \nabla \mathcal{K}(x)$  da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$ , vista come funzione di  $x$ , sarà nullo per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ :

$$df_x(h) \cdot \nabla \mathcal{K}(x) + f(x) \cdot \mathcal{H}\mathcal{K}_x(h) = 0,$$

e calcolando questa espressione in  $x = x_0$ , ricordando che  $f(x_0) = 0$ , si ottiene  $\forall h \in \mathbb{R}^n$ :

$$df_{x_0}(h) \cdot \nabla \mathcal{K}(x_0) = 0.$$

Essendo però lo Jacobiano di  $f$  invertibile nel punto di equilibrio  $x_0$ , si ottiene che  $\nabla \mathcal{K}(x_0) = 0$ , e di conseguenza  $f(\mu, x_0) = 0$  come desiderato. Adesso rimane da verificare che siamo nelle condizioni di applicabilità del Teorema di biforcazione di Hopf, con:

$$A_\mu := \partial_x f(\mu, x_0) = df_{x_0} + \mu \mathcal{H}\mathcal{K}_{x_0}.$$

Notiamo che se  $\mu_0 = 0$ ,  $A_{\mu_0}$  si riduce allo Jacobiano di  $f$  calcolato nel punto di equilibrio, per cui le ipotesi sull'esistenza e le caratteristiche degli autovalori di  $A_0$  sono tutte automaticamente soddisfatte dalle ipotesi da noi assunte per il presente teorema, fatta eccezione per la condizione di trasversalità che ora mostreremo essere comunque verificata. Intanto notiamo che, per le ipotesi sullo spettro di  $df_{x_0}$ , esiste una base in cui esso ha la seguente forma a blocchi:

$$df_{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & \mathbb{O} \\ -\omega_0 & 0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & R \end{pmatrix},$$

con  $R$  una matrice quadrata  $(n-2) \times (n-2)$  che non contiene  $\pm i\omega_0$  nel suo spettro, mentre le  $\mathbb{O}$  sono matrici nulle di dimensioni opportune. Calcoliamo ora il differenziale rispetto a  $x$  della seguente espressione, da noi ricavata poco fa:

$$df_x(h) \cdot \nabla \mathcal{K}(x) + f(x) \cdot \mathcal{H}\mathcal{K}_x(h) = 0.$$

Differenziando il membro di sinistra rispetto a  $x$ , calcolandola poi in  $x = x_0$ , e utilizzando  $\nabla \mathcal{K}(x_0) = 0$  e  $f(x_0) = 0$ , otteniamo la seguente espressione:

$$k \mapsto df_{x_0}(h) \cdot \mathcal{H}\mathcal{K}_{x_0}(k) + df_{x_0}(k) \cdot \mathcal{H}\mathcal{K}_{x_0}(h).$$

Ponendo, per semplicità,  $A := df_{x_0}$  e  $B := \mathcal{H}\mathcal{K}_{x_0}$ , e uguagliando col differenziale del membro di destra, si ottiene:

$$Ah \cdot Bk + Ak \cdot Bh = 0, \quad \forall h, \forall k \in \mathbb{R}^n,$$

e quindi, dato che  $B$  è simmetrico per ipotesi:

$$A^T B + BA = 0.$$

Da questo segue che l'hessiano di  $\mathcal{K}$  ha, nella stessa base usata per la forma a blocchi di  $df_{x_0}$ , la forma seguente:

$$\mathcal{H}\mathcal{K}_{x_0} = \begin{pmatrix} a & 0 & \mathbb{O} \\ 0 & a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & G \end{pmatrix},$$

con  $G$  una matrice quadrata  $(n-2) \times (n-2)$ , e  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , poiché per ipotesi  $\mathcal{H}\mathcal{K}_{x_0}$  è non degenere. Sempre nella stessa base, pertanto, la matrice  $A_\mu = df_{x_0} + \mu \mathcal{H}\mathcal{K}_{x_0}$  ha la forma:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \mu a & \omega_0 & \mathbb{O} \\ -\omega_0 & \mu a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & R + \mu G \end{pmatrix},$$

da cui segue che la curva di autovalori  $\lambda(\mu)$  passante per  $\lambda(0) = i\omega_0$  è data da  $\lambda(\mu) = \mu a \pm i\omega_0$ , e pertanto  $a'(0) = a \neq 0$ , ossia la condizione di trasversalità. È garantita, dunque, mediante l'applicazione del Teorema di Biforcazione di Hopf, l'esistenza di una famiglia di soluzioni  $u_s$  con frequenze  $\omega(s)$  dipendenti da un parametro, e con le proprietà richieste, attorno al punto di equilibrio  $x_0$ .  $\square$



# Capitolo 3

## Il problema ristretto dei tre corpi

### 3.1 Il problema dei due corpi

Il problema dei due corpi consiste, in generale, nello studio della dinamica del sistema di due corpi, posto che si conoscano opportune condizioni iniziali. Il caso che discuteremo, e anche il primo caso storicamente studiato, è quello di due masse puntiformi di cui si conoscono le posizioni iniziali nello spazio tridimensionale e le velocità iniziali, che interagiscono mediante la forza di gravità, nello schema della meccanica newtoniana. Il problema nacque infatti dalla meccanica celeste, ossia dalla volontà di prevedere il moto dei pianeti del sistema solare e dei loro satelliti a partire dalla conoscenza della loro configurazione in un dato istante di tempo. Dal punto di vista matematico, questo problema costituisce uno degli esempi classici di sistema dinamico il cui studio è riconducibile all'analisi di un opportuno numero di sistemi a un numero minore di gradi di libertà. In particolare il problema dei due corpi, a priori un sistema la cui dinamica è descritta da sei equazioni differenziali del secondo ordine a sei variabili, è separabile in due sistemi a tre gradi di libertà disaccoppiati, quello del centro di massa che compie un moto rettilineo uniforme, in accordo con il Principio di conservazione della quantità di moto, e il sistema che descrive il moto relativo dei due corpi, ulteriormente separabile. Impostiamo dunque il problema, a partire dalle Leggi della Dinamica e dalla Legge di Gravitazione Universale di Newton, interessandoci principalmente a ricavare la forma delle orbite. Il problema sarà da noi formulato nel seguente modo: *“Determinare il moto di due punti materiali di masse  $m_1$  e  $m_2$  che si muovono nello spazio tridimensionale interagendo fra di loro attraverso la forza di gravitazione universale di Newton, in assenza di altri corpi o di altri agenti esterni.”* I simboli in grassetto indicheranno vettori nello spazio geometrico tridimensionale: consideriamo il moto di due corpi puntiformi corrispondenti ai punti  $P_1$  e  $P_2$ , di masse, posizioni e velocità  $m_1, \mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1$  per il primo corpo e  $m_2, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2$  per il secondo.

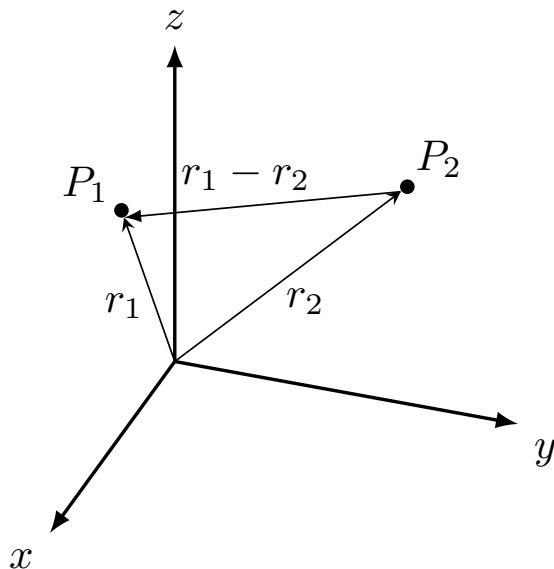


Figura 3.1: Setting del problema dei due corpi

Per quanto detto sopra, considerando l'espressione della forza di gravitazione universale, il Secondo ed il Terzo Principio della Dinamica, le equazioni del moto sono le seguenti:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = +Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Come anticipato, un opportuno cambio di coordinate conduce alla separazione del moto in moto del centro di massa e moto relativo. Definendo infatti:

$$\mathbf{R} := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad M := m_1 + m_2, \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

le equazioni del moto si trasformano nelle seguenti due:

$$M \ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

La prima delle due equazioni descrive il moto del baricentro del sistema, che è manifestamente un moto rettilineo uniforme, mentre la seconda descrive il moto relativo fra i due corpi, per cui il problema si è ridotto allo studio di un moto in campo centrale. Studiamo dunque il moto relativo, descritto dall'evoluzione nel tempo della coordinata relativa  $\mathbf{r}$ . poiché il momento angolare  $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$  si conserva nel tempo, il moto della coordinata relativa avviene rispettivamente su una retta nel caso in cui  $\mathbf{L}(t=0) = 0$ , su un piano se  $\mathbf{L}(t=0) \neq 0$ . Ad ogni modo il moto avviene in un piano, per cui è conveniente passare alle coordinate cilindriche  $(r, \vartheta, z)$ , dove  $z$  è orientato nella direzione del momento angolare  $\mathbf{L}(t=0)$ . Essendo, in coordinate cartesiane,  $\mathbf{r} = (\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta, 0)$ , la dinamica del sistema è



indipendente dalla coordinata  $z$ , per cui il numero di gradi di libertà si riduce ulteriormente a due. Imponendo la conservazione del momento angolare espresso in termini di  $\varrho$  e  $\vartheta$ , ponendo  $L := |\mathbf{L}|$  si ottiene la relazione:

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{\mu\varrho^2}.$$

Notiamo esplicitamente che, se  $\varrho$  si mantiene costante nel tempo, la velocità angolare del moto è costante. In altre parole, i due corpi orbitano seguendo moti circolari uniformi attorno al centro di massa del sistema che formano. Dalla conservazione dell'energia meccanica per il sistema totale, così come per quella associata al moto del centro di massa, invece, otteniamo la legge di conservazione dell'energia meccanica  $E$  del moto relativo, espressa mediante le coordinate cilindriche dalla relazione:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\varrho}^2 - G\frac{m_1m_2}{\varrho} + \frac{L^2}{2\mu\varrho^2} = E.$$

Da questa otteniamo la seguente relazione per  $\dot{\varrho}$ :

$$\dot{\varrho} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + G\frac{m_1m_2}{\varrho} - \frac{L^2}{2\mu\varrho^2}\right)}.$$

Dalla relazione per  $\dot{\vartheta}$  si ha che se  $L \neq 0$ ,  $\dot{\vartheta} \neq 0$  e la funzione  $t \rightarrow \vartheta(t)$  è localmente invertibile, per il Teorema della Funzione Implicita, ed è dunque possibile esprimere  $t$  in funzione di  $\vartheta$ . Questo significa che è possibile eliminare il tempo dalle equazioni per  $\dot{\vartheta}$  e  $\dot{\varrho}$  e stabilire direttamente la relazione fra le variabili angolare e radiale, espressa tramite la seguente equazione differenziale, valida per  $L \neq 0$ :

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \pm\frac{\mu\varrho^2}{L}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + G\frac{m_1m_2}{\varrho} - \frac{L^2}{2\mu\varrho^2}\right)}.$$

Adesso, alcune posizioni: diremo  $V_{\text{eff}}(\varrho) = -Gm_1m_2/\varrho + L^2/(2\mu\varrho^2)$  il potenziale efficace che governa la dinamica della variabile radiale, e converremo di chiamare  $k = Gm_1m_2$ . Per un fissato valore di energia  $E$ ,  $\varrho(t)$  ammette sempre un minimo, che chiameremo  $\varrho_1$ :

$$\varrho_1 := \frac{L^2}{\mu k} \left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{EL^2}{\mu k^2}}\right)^{-1}.$$

Scegliamo infine i dati iniziali  $(\bar{\varrho}, \bar{\vartheta})$  in modo tale da selezionare la determinazione positiva della radice quadrata. L'equazione differenziale che si ottiene può essere risolta per separazione di variabili, ossia ricondotta al calcolo del seguente integrale:

$$\vartheta = \bar{\vartheta} + \int_{\bar{\varrho}}^{\varrho(\vartheta)} \frac{1}{\varrho^2 \sqrt{2\mu E/L^2 - 1/\varrho^2 + 2\mu k/(L^2\varrho)}} d\varrho.$$

Senza perdita di generalità possiamo prendere  $\bar{\vartheta} = 0$  e  $\bar{\varrho} = \varrho_1$ . Operiamo inoltre la sostituzione  $w = 1/\varrho$ , per cui l'espressione precedente diviene:

$$\vartheta = \int_{w(\vartheta)}^{w_1} \frac{1}{\sqrt{2\mu E/L^2 - w^2 + 2\mu k w/L^2}} dw.$$

Ponendo, per semplicità,  $A = 2\mu E/L^2$  e  $B = \mu k/L^2$ , otteniamo:

$$\vartheta = \int_{w(\vartheta)}^{w_1} \frac{1}{\sqrt{A + 2Bw - w^2}} dw,$$

che è un integrale riconducibile a quello della funzione arcocoseno, mediante la sostituzione  $z = (w - B)/\sqrt{A + B^2}$ , per cui otteniamo:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}} \left( \frac{L^2}{\mu k \varrho} - 1 \right),$$

da cui, risostituendo le costanti del problema originale, otteniamo infine:

$$\varrho(\vartheta) = \frac{L^2}{G\mu^2 M} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \vartheta},$$

che è l'equazione di una conica nel piano delle variabili  $r_1$  ed  $r_2$ , con eccentricità  $\epsilon$ , e uno dei due fuochi nell'origine. In particolare, essa rappresenta un'ellisse se  $0 \leq \epsilon < 1$ , una parabola se  $\epsilon = 1$ , un ramo di iperbole se  $\epsilon > 1$ .

## 3.2 Il problema circolare planare ristretto dei tre corpi

Una delle varianti del problema dei tre corpi si può formulare nel seguente modo: *"Studiare la dinamica del sistema costituito da tre punti materiali di masse  $m_1$ ,  $m_2$  ed  $m_3$  che si muovono nello spazio interagendo fra di loro attraverso la forza di gravitazione universale di Newton."* Al contrario del problema dei due corpi, il problema più generale degli  $N$  corpi, con  $N \geq 3$  non possiede alcuna soluzione in forma chiusa nel caso generale. Nei secoli sono state trovate varie soluzioni esplicite, ma solo per alcune configurazioni particolari, oppure sotto opportune ipotesi semplificatrici. Il caso che studieremo noi è quello del *problema circolare planare ristretto dei tre corpi*, un caso molto particolare, che può essere formulato nella seguente maniera: *"Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m_1$  ed  $m_2$ , detti primari si muovono nello spazio tridimensionale seguendo orbite Kepleriane circolari, che giacciono entrambe sullo stesso piano. Si consideri un terzo punto materiale  $Q$ , di massa  $m_3$  trascurabile rispetto a  $m_1$  ed  $m_2$ , di modo che il moto di  $P_1$  e  $P_2$  non ne sia influenzato. Sotto l'ulteriore ipotesi che il moto di  $Q$  avvenga nello stesso piano del moto dei primari, si studi la dinamica del sistema."* Il problema dell'interazione relativa fra i tre corpi viene dunque visto, in quest'approssimazione, come il problema del moto di un piccolo corpo sotto l'influenza del campo gravitazionale di due corpi più massicci. Molti problemi della meccanica celeste possono essere inquadrati mediante lo schema descritto, come per esempio il caso del moto di un satellite artificiale nel campo gravitazionale della Terra e della Luna, o quello del

moto degli asteroidi nel sistema solare sotto l'attrazione del Sole e di Giove. Cominciamo dunque con l'impostazione del problema, che studieremo, come con il problema dei due corpi, partendo dai Principi della Dinamica e dalla Legge di Gravitazione Universale di Newton: poiché abbiamo supposto che il moto dei tre corpi avvenga su un piano, e che i due primari ruotino attorno al centro di massa del sistema che essi costituiscono, lungo orbite circolari e a velocità angolare costante  $\gamma$ , introduciamo un sistema di coordinate rotante  $Oxy$ , fissando l'origine nel baricentro del sistema, di modo che i due primari appaiano fermi. Orientiamo inoltre l'asse  $x$  lungo la congiungente (rotante) fra i due primari. A questo punto è conveniente scegliere le unità di misura in modo tale che la velocità angolare sia  $\gamma = 1$ , così come la costante gravitazionale  $G = 1$ , e la somma fra le masse dei primari  $M_1 + M_2 = 1$ . Fissando  $M_2 = m$  (e quindi  $M_1 = 1 - m$ ) abbiamo che  $P_1 = (-m, 0)$  e  $P_2 = (1 - m, 0)$ .

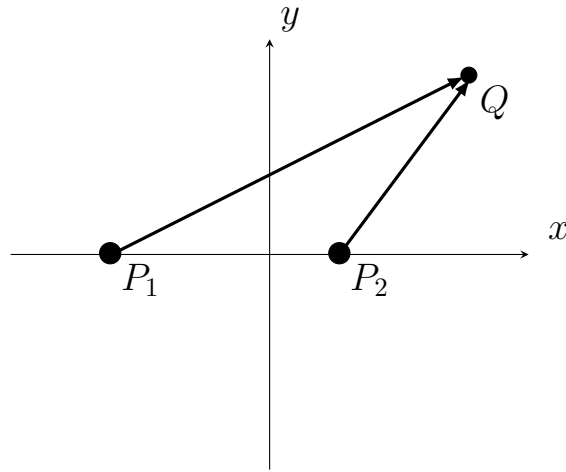


Figura 3.2: Setting del problema ristretto dei tre corpi

In queste condizioni,  $Q = (x, y)$  risente della forza di Coriolis, della forza centrifuga e della forza di attrazione gravitazionale dovuta alla presenza dei primari, forze corrispondenti ai potenziali:

$$U_{\text{grav}}(x, y) = -\frac{1 - m}{\sqrt{(x + m)^2 + y^2}} - \frac{m}{\sqrt{(x + m - 1)^2 + y^2}}$$

$$U_{\text{cf}} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad U_{\text{cor}} = 2(y\dot{x} - x\dot{y}).$$

E quindi  $Q = (x, y)$  soddisfa le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\partial_x U_{\text{grav}}(x, y) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\partial_y U_{\text{grav}}(x, y) \end{cases}$$

Le posizioni  $(x, y)$  corrispondenti a punti di equilibrio del sistema sono le soluzioni di :

$$\begin{cases} -x = -\partial_x U_{\text{grav}}(x, y) \\ -y = -\partial_y U_{\text{grav}}(x, y) \end{cases}$$

E dunque:

$$\begin{cases} -x = \partial_x \left( \frac{1-m}{\sqrt{(x+m)^2 + y^2}} + \frac{m}{\sqrt{(x+m-1)^2 + y^2}} \right) \\ -y = \partial_y \left( \frac{1-m}{\sqrt{(x+m)^2 + y^2}} + \frac{m}{\sqrt{(x+m-1)^2 + y^2}} \right) \end{cases}$$

Ossia:

$$\begin{cases} -x = -\frac{(1-m)(x+m)}{((x+m)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m(x+m-1)}{((x+m-1)^2 + y^2)^{3/2}} \\ -y = -\frac{(1-m)y}{((x+m)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{my}{((x+m-1)^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

$y = 0$  è una soluzione della seconda equazione. Sostituendo nella prima, otteniamo:

$$x = \frac{(1-m)(x+m)}{|x+m|^3} + \frac{m(x+m-1)}{|x+m-1|^3},$$

che è un'equazione che possiede tre soluzioni distinte, raffigurate qualitativamente in Figura [3.3](#), dove sono disegnati i grafici delle due curve:

$$z = x, \quad z = \frac{(1-m)(x+m)}{|x+m|^3} + \frac{m(x+m-1)}{|x+m-1|^3}.$$

Una delle soluzioni è sempre  $x_1 < -m$ , una  $-m < x_2 < 1-m$ , ed una  $x_3 > 1-m$ , per cui abbiamo subito tre punti di equilibrio detti *punti di equilibrio collineari*  $L_1 = (x_1, 0)$ ,  $L_2 = (x_2, 0)$  ed  $L_3 = (x_3, 0)$ .

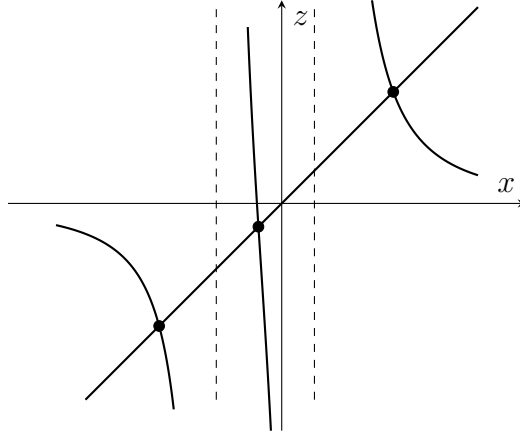


Figura 3.3: Le tre ascisse dei punti di equilibrio collineari

Cerchiamo altre soluzioni. Partendo dall'ipotesi che  $y \neq 0$ , il sistema diviene:

$$\begin{cases} x = \frac{(1-m)(x+m)}{((x+m)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m(x+m-1)}{((x+m-1)^2 + y^2)^{3/2}} \\ 1 = \frac{(1-m)}{((x+m)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m}{((x+m-1)^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Prima di proseguire poniamo per semplicità:

$$h := \frac{1}{((x+m)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad k := \frac{1}{((x+m-1)^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Moltiplichiamo ora la seconda equazione per  $x$  e sottraiamo membro a membro, ottenendo così:

$$\begin{aligned} 0 &= h((1-m)(x+m) - (1-m)x) + k(m(x+m-1) - mx) \\ 0 &= hm(1-m) - km(1-m) \\ 0 &= m(1-m)(h-k) \end{aligned}$$

Da cui segue necessariamente che  $h = k$ , ossia i punti di equilibrio rimanenti avranno necessariamente la stessa distanza fra i due primari. Sostituendo nella seconda otteniamo:

$$1 = h(1-m) + hm \implies h = k = 1.$$

Esistono, pertanto, due ultimi punti di equilibrio, che chiameremo  $L_4$  ed  $L_5$ , che formano entrambi con i primari un triangolo equilatero, e vengono infatti chiamati *punti di equilibrio triangolari*. Il sistema da noi considerato contiene in totale, dunque, 5 punti di equilibrio detti *punti di Lagrange*  $L_1, L_2, L_3, L_4$ , ed  $L_5$ . Con un passaggio dal sistema di coordinate in cui i primari sono fermi a quello originale, qualsiasi punto fermo nel primo sistema di riferimento ruota attorno al centro di massa dei primari seguendo un moto circolare uniforme, nel secondo. Ne segue che, posizionando un piccolo corpo esattamente in uno dei cinque punti di Lagrange, questo si muoverà attorno al centro di massa dei primari di moto circolare uniforme, con la stessa velocità angolare (e uniforme) dei due primari.

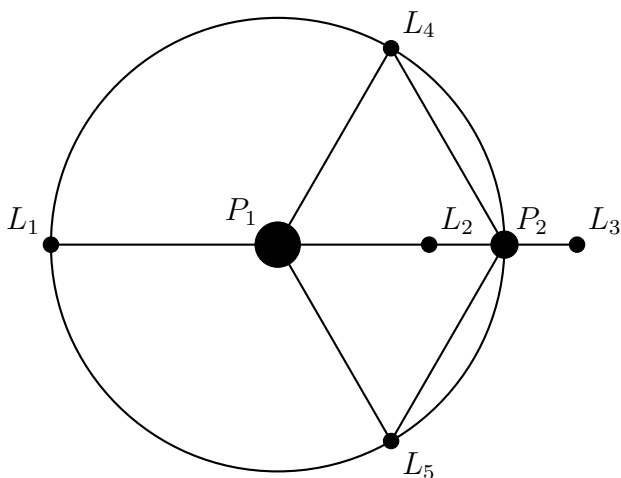


Figura 3.4: I punti di Lagrange, caso limite

Mettiamoci adesso nel caso limite in cui uno dei due primari è molto meno massiccio dell'altro (e quindi nel caso in cui il centro di massa del sistema dei due primari tende verso il centro di massa del primario più massiccio). In questo caso limite, l'analisi finora condotta

ci fa affermare per esempio che un piccolo corpo messo in  $L_4$  o  $L_5$  rispettivamente precederà o seguirà, di  $60^\circ$ , il primario più piccolo nella sua traiettoria circolare uniforme attorno al primario più massiccio, come illustrato in Figura [3.4](#).

Naturalmente nella nostra discussione sono state utilizzate numerose approssimazioni: quello che si verifica in realtà è che piccoli corpi possono essere visti compiere orbite oscillatorie attorno ai punti di Lagrange. Questo fenomeno effettivamente è stato osservato nel sistema solare, e tali piccoli secondari prendono il nome di *satelliti troiani*. A partire dal 1906, quando l'astronomo tedesco Max Wolf scoprì *588 Achilles*, il primo asteroide troiano, vicino al punto  $L_4$  del sistema Sole-Giove, ne sono stati scoperti a migliaia, principalmente nei punti di Lagrange  $L_4$  ed  $L_5$  del sistema Sole-Giove, ma anche nei sistemi Sole-Venere, Sole-Terra, Sole-Marte, Sole-Urano, e Sole-Nettuno.

Andiamo ora a studiare l'esistenza di traiettorie periodiche attorno ai punti di equilibrio, mediante l'utilizzo del Teorema del centro di Lyapunov, motivo per cui ora trasformiamo il sistema in un sistema equivalente del prim'ordine, definendo  $p = \dot{x}$  e  $q = \dot{y}$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{y} = q \\ \dot{p} = 2q + x - \partial_x U_{\text{grav}}(x, y) \\ \dot{q} = -2p + y - \partial_y U_{\text{grav}}(x, y) \end{cases}$$

e dunque un sistema del prim'ordine in quattro dimensioni  $\dot{u} = f(u)$ , con  $u = (x, y, p, q)$  e  $f$  definito sopra. Questo sistema ammette l'*integrale di Jacobi* come integrale primo del moto:

$$\mathcal{J}(x, y, p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - x^2 - y^2) - U_{\text{grav}}(x, y).$$

Infatti, calcolandone la derivata sulle traiettorie del moto si ottiene (poniamo  $U = U_{\text{grav}}(x, y)$ ):

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{J}(u)) = \nabla \mathcal{J}(u) \cdot f(u) =$$

$$(-x + \partial_x U)p + (-y + \partial_y U)q + p(2q + x - \partial_x U) + q(-2p + y - \partial_y U) = 0.$$

Ora, l'hessiano dell'integrale di Jacobi, di cui ci interessiamo per applicare il Teorema del centro di Lyapunov, è:

$$\mathcal{H}\mathcal{J}(u) = \begin{pmatrix} -1 - \partial_{xx}^2 U(u) & -\partial_{xy}^2 U(u) & 0 & 0 \\ -\partial_{xy}^2 U(u) & -1 - \partial_{yy}^2 U(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è:

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \partial_{xx}^2 U(u) & -\partial_{xy}^2 U(u) \\ -\partial_{xy}^2 U(u) & -1 - \partial_{yy}^2 U(u) \end{pmatrix} = (1 + \partial_{xx}^2 U(u))(1 + \partial_{yy}^2 U(u)) - (\partial_{xy}^2 U(u))^2.$$

Per calcolare questo determinante (e verificare che effettivamente  $\mathcal{H}\mathcal{J}$  sia non singolare in tutti e 5 i punti di equilibrio) ricordiamo che nelle nuove coordinate, i punti di equilibrio

sono dati da:  $u_j = (x_j, y_j, 0, 0) \forall j = 1, \dots, 5$ , con  $L_j \equiv (x_j, y_j)$ . Si ottiene, in tutti e cinque i punti di equilibrio, che  $\mathcal{HJ}(u_j)$  è non singolare. Omettiamo per brevità i calcoli necessari per arrivare a tale risultato, e per ulteriori dettagli rimandiamo a [1]. Ora è da analizzare lo Jacobiano di  $f$ , per sapere se il suo spettro soddisfa o meno le proprietà richieste, ossia l'esistenza di una coppia di autovalori immaginari coniugati, e la condizione di "non risonanza" riguardante gli altri autovalori:

$$df_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 + \partial_{xx}^2 U & \partial_{yx}^2 U & 0 & 2 \\ \partial_{xy}^2 U & 1 + \partial_{yy}^2 U & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice, le cui radici sono funzioni di  $x$  e di  $y$  tramite  $U$ , è:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 + \partial_{xx}^2 U & \partial_{yx}^2 U & -\lambda & 2 \\ \partial_{xy}^2 U & 1 + \partial_{yy}^2 U & -2 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda[-\lambda(\lambda^2 + 4) - 2\partial_{yx}^2 U + \lambda(1 + \partial_{yy}^2 U)] + \lambda[-2(1 + \partial_{xx}^2 U)(1 + \partial_{yy}^2 U) + \lambda\partial_{xy}^2 U] + \det S,$$

avendo convenuto di chiamare:

$$S = \begin{pmatrix} 1 + \partial_{xx}^2 U & \partial_{yx}^2 U \\ \partial_{xy}^2 U & 1 + \partial_{yy}^2 U \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori dello jacobiano  $df_u$  soddisfano dunque l'equazione nell'incognita  $\lambda$ :

$$\lambda^4 + (4 - \partial_{xx}^2 U - \partial_{yy}^2 U)\lambda^2 + \det S = 0.$$

Iniziamo dal caso dei punti di equilibrio collineari, o punti di Eulero  $L_1, L_2$  ed  $L_3$ . Poiché in questi punti le derivate parziali seconde miste del potenziale sono nulle, l'equazione che soddisfano gli autovalori sarà:

$$\lambda^4 + (4 - \partial_{xx}^2 U - \partial_{yy}^2 U)\lambda^2 + (1 + \partial_{xx}^2 U)(1 + \partial_{yy}^2 U) = 0.$$

Ora, in  $L_1, L_2$  ed  $L_3$ ,  $(1 + \partial_{xx}^2 U)(1 + \partial_{yy}^2 U)$  è negativo, e quindi in ogni caso abbiamo una permanenza e una variazione del segno dei coefficienti del polinomio caratteristico. Avremo quindi due autovalori reali, uno positivo e uno negativo, e altri due autovalori immaginari coniugati della forma  $\pm i\omega_j$ ,  $\omega_j > 0$  per ogni punto di Eulero. È così dimostrata, grazie al Teorema del centro di Lyapunov, l'esistenza di una famiglia di soluzioni periodiche per i punti di Eulero  $L_1, L_2, L_3$ , con periodo  $T_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) che tende a  $2\pi/\omega_j$  nel limite delle piccole oscillazioni. Di più, per l'esistenza di un autovalore con parte reale positiva, tutti e tre i punti di equilibrio sono instabili secondo Lyapunov. Passiamo ora ai punti di Lagrange  $L_4$  ed  $L_5$ , per cui la situazione è diversa. Consideriamo il punto  $L_4$ , a titolo di esempio, notando esplicitamente che le stesse considerazioni varranno per il punto  $L_5$  a causa della simmetria delle equazioni differenziali del sistema dinamico. Con gli stessi calcoli illustrati in precedenza, perveniamo al polinomio caratteristico dello jacobiano  $df_{L_4}$ :

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}m(1-m) = 0 \implies \lambda_{\pm}^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27m(1-m)},$$

per cui, fintanto che  $27m(1-m) < 1$ , avremo due coppie di autovalori complessi coniugati, diciamo  $\pm i\omega'$  e  $\pm i\omega''$  (senza perdita di generalità assumeremo  $\omega' < \omega''$ ). La condizione  $27m(1-m) < 1$ , unita con  $0 < m < 1$ , equivale a:

$$0 < m < \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) =: m_0 \simeq 0.0385,$$

ossia se il rapporto fra le masse fra i due primari supera (approssimativamente) 25. Questo è senz'altro il caso in cui consideriamo il sistema formato dal Sole e Giove, in cui si ha un valore di  $m_0 \simeq 10^{-3}$ , così come, a maggior ragione, dal Sole e da qualsiasi altro pianeta del sistema solare, e così come anche il sistema formato da Terra e Luna ( $m_0 \simeq 10^{-2}$ ). Notiamo, a questo punto, che prendendo  $\omega_0 := \omega''$  il Teorema di Lyapunov è applicabile direttamente, per cui è sempre presente, nel caso in cui il rapporto fra le masse dei primari sia sufficientemente alto, una famiglia di soluzioni periodiche attorno ai punti di equilibrio  $L_4$  ed  $L_5$ , con periodi che tendono a  $2\pi/\omega''$ . Se, invece,  $\omega_0 := \omega'$ , è da richiedere la condizione di non risonanza  $\omega'' \neq k\omega', \forall k \in \mathbb{N}$ . Per capire quale sia la conseguenza di questa richiesta, in termini di vincoli sul rapporto fra le masse dei primari, consideriamo le relazioni fra i coefficienti del polinomio caratteristico e le sue soluzioni. È chiaro che si debba avere  $\omega'^2 + \omega''^2 \neq 1$  e contemporaneamente  $\omega'^2\omega''^2 \neq \frac{27}{4}m(1-m)$ . Questo significa che, fra tutti i valori di  $m$  ammessi, è necessario escludere quelli che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} \omega'' = k\omega' \\ \omega'^2 + \omega''^2 = 1 \\ \omega'^2\omega''^2 = \frac{27}{4}m(1-m) \end{cases},$$

ossia, come può essere facilmente verificato per sostituzione, per i valori di  $m$  per cui, per un certo  $k \in \mathbb{N}$ , si ha:

$$\frac{27}{4}m(1-m) = \frac{k^2}{(1+k^2)^2}.$$

Per ogni  $k$  esistono due soluzioni distinte, e al crescere di  $k$  abbiamo due successioni di soluzioni, una che chiameremo  $m_k^1$ , che è decrescente ed infinitesima, e un'altra, che chiameremo  $m_k^2$ , che è crescente ed ha limite 1. Poiché il primo termine di  $m_k^2$  è al di sopra della soglia fissata da  $m_0$ , sono oggetto del nostro interesse solo le soluzioni corrispondenti alla successione  $m_k^1$ , che per semplicità possiamo chiamare  $m_k$ . Sono queste, dunque, quelle realmente da escludere affinché sia soddisfatta la condizione di non risonanza. Se dunque per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha  $m \neq m_k$ , allora esiste una seconda famiglia di soluzioni periodiche nelle vicinanze dei punti d'equilibrio triangolari  $L_4$  ed  $L_5$ , il cui periodo tende stavolta a  $2\pi/\omega'$ . Per quanto riguarda la stabilità di  $L_4$  ed  $L_5$ , lo Jacobiano del campo vettoriale che definisce il sistema dinamico possiede, come evidenziato in precedenza, due coppie di autovalori complessi coniugati.  $L_4$  ed  $L_5$  sono quindi dei centri, e pertanto sono linearmente stabili. Per quanto riguarda la stabilità secondo Lyapunov, la sola analisi del sistema linearizzato non è in grado



di dire nulla, ma è possibile dimostrare con tecniche più avanzate (per esempio, con la teoria KAM) che, eccezione fatta per un insieme di misura nulla di valori di  $m$ , essi sono stabili secondo Lyapunov. Per ulteriori dettagli rimandiamo a [\[9\]](#).



# Bibliografia

- [1] Antonio Ambrosetti, Giovanni Prodi., *A primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1995
- [2] Guido Gentile, *Introduzione ai sistemi dinamici*, <http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2014-2015/FM410/testo.html>
- [3] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview Press, 1994
- [4] Andrej N. Kolmogorov, Sergej V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Editori Riuniti, 2012
- [5] Renato E. Mirollo, Steven H. Strogatz, *Synchronization of Pulse-Coupled Biological Oscillators*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 50, N. 6, 1990
- [6] Melvin S. Berger, *Nonlinearity and functional analysis*, Academic Press, 1977
- [7] Giancarlo Benettin, *Una passeggiata nei sistemi dinamici*, <https://www.math.unipd.it/~benettin/Galileiana/dispense.pdf>
- [8] Alberto Maspero, *Il problema circolare dei tre corpi ristretto*, note manoscritte, <https://people.sissa.it/~amaspero/teaching/dynamical%20systems/papers/prob3>
- [9] Jürgen K. Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems*, Memoirs of the American Mathematical Society 81, 1968
- [10] Henri Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, American Institute of Physics, 1993
- [11] Peter Lancaster, *On eigenvalues of matrices dependent on a parameter*, Numerische Mathematik 6, 377–387, 1964