GE220 - Topologia
Dip. Matematica - Università Roma Tre

M. Pontecorvo e R. Carbone

Compito - 10 aprile 2018

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
NON PARLARE e metter via i cellulari pena il ritiro del compito.
Rispondere alle domande <u>giustificando attentamente le risposte</u>.

Punteggio totale 100 punti + 10 di bonus

1. **(15 punti).** Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia Euclidea e sia X lo spazio topologico quoziente dato dalla relazione d'equivalenza

$$x \, \rho \, y \iff y - x \in \mathbb{Q}$$

Dimostrare che la topologia quoziente su X coincide con la topologia grossolana, anche detta topologia banale.

2. **(15 punti).** Il grafico di un'applicazione $f : X \to Y$ è il sottoinsieme $\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$. Dimostrare che se f è continua tra spazi topologici allora Γ dotato della topologia indotta dal prodotto è sempre omeomorfo al dominio X di f. (Esibire l'inversa, giustificando).

3. Sia data su $\mathbb{R}$ la famiglia di sottoinsiemi

$$\mathcal{B}_S = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(a) **(5 punti).** Verificare che $\mathcal{B}_S$ è una base di una topologia su $\mathbb{R}$.
Detta $\mathcal{S}$ tale topologia, lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ si dice "retta di Sorgenfrey".

(b) **(5 punti).** Si consideri su $\mathbb{R}$ la topologia della semicontinuità inferiore $\mathcal{S}_-$ che ha per base la famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{B}_- = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{S}$ è confrontabile $\mathcal{S}_-$? Se sì, quale delle due topologie è più fine?

(c) **(5 punti).** Mostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ è uno spazio topologico di Hausdorff.

(d) **(5 punti).** È vero che esiste un omeomorfismo tra $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{S}_-)$? (Giustificare)

(e) **(10 punti).** Considerare in $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ le successioni $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}$ e $X' = \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}$. È vero che X converge a 0? E X'? (Giustificare)

(f) **(10 punti).** Mostrare che rispetto alla topologia $\mathcal{S}$:
$[0, 1)$ è aperto e chiuso,
$(0, 1)$ è aperto,
$[0, 1]$ è chiuso non aperto.

(g) **(10 punti).** (Facoltativo, **bonus**) Mostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ non è omeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, dove $\mathcal{E}$ è la topologia euclidea.

4. Si consideri $X = \mathbb{R}^2$ dotato della topologia euclidea, e il gruppo ortogonale definito come segue:

$$G = O_2 = \{M \in Mat(2, \mathbb{R}) : M^T M = 1\}$$

   (a) **(5 punti).** Per ogni $M \in G$ fissato mostrare, scrivendola esplicitamente, che l'applicazione di moltiplicazione matrice per vettore

$$\begin{aligned} X &\to X \\ \mathbf{x} &\mapsto M\mathbf{x} \end{aligned}$$

   è un omeomorfismo.

   (b) **(10 punti).** Si consideri l'azione di G su X data dal prodotto matrice per vettore. Dato un numero reale $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e il vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \in X$, si mostri che l'orbita di $\mathbf{x}$ è uguale all'insieme:

$$Y_R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X : x^2 + y^2 = R^2 \right\}$$

   (c) **(5 punti).** Sia $S = \mathbb{R}_{\geq 0}$ la semiretta destra con origine 0 in $\mathbb{R}$, dotata della topologia euclidea. Si consideri l'applicazione tra spazi topologici:

$$\begin{aligned} f : X &\to S \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

   Dimostrare che f è continua e costante sulle orbite.

   (d) **(10 punti).** Si consideri $\pi : X \to X/G$ il quoziente di X rispetto all'azione di G e si denoti con $\tilde{f} : X/G \to S$ l'applicazione continua indotta da f tramite la proprietà universale. Dimostrare che $\tilde{f}$ è un omeomorfismo.