GE220 - Topologia
Dip. Matematica - Università Roma Tre

M. Pontecorvo e R. Carbone

Compito - 29 maggio 2018

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
NON PARLARE e metter via i cellulari pena il ritiro del compito.
Rispondere alle domande <u>giustificando attentamente le risposte</u>.

Punteggio totale 100 punti

1. Dopo aver fatto una (bella) figura dell'insieme

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy(x - y)(x^2 - 9)(y^2 - 4) = 0\}$$

considerare la topologia indotta dal piano Euclideo e rispondere alle seguenti domande.

   (a) **(5 punti).** X è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^2$?
   (b) **(5 punti).** X è uno spazio topologico connesso?
   (c) **(5 punti).** X è uno spazio topologico compatto?
   (d) **(10 punti).** Ogni omeomorfismo di X in se stesso deve necessariamente fissare l'origine?

Girare, prego →

2. Dimostrare o confutare le affermazioni che seguono:

   (a) **(5 punti).** S^1 è retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

   (b) **(5 punti).** S^1 è retratto di $\mathbb{R}^2$.

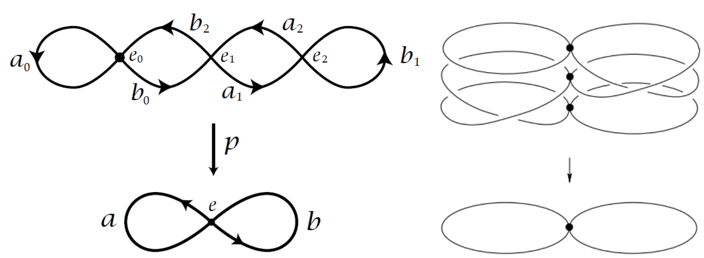
   (c) **(5 punti).** Se $p \in S^1$, $\{p\}$ è retratto di S^1.

   (d) **(5 punti).** Se $p \in S^1$, $\{p\}$ è retratto di deformazione di S^1.

   (e) **(10 punti).** $\mathbb{R}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

   (f) **(10 punti).** $\mathbb{R}^2$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

3. Si consideri il rivestimento tra spazi topologici $p : \tilde{X} \to X$ descritto nella seguente figura



dove i punti $e_i \in \tilde{X}$ sono mandati in $e \in X$ e i cammini a_i e b_i in $\tilde{X}$ sono mandati rispettivamente sui cammini a e b di X secondo la direzione indicata dalle frecce (a destra raffigurata una rappresentazione alternativa dello stesso rivestimento).

Sapendo che il gruppo fondamentale di $\tilde{X}$ è isomorfo al gruppo libero generato da 4 elementi:

   (a) **(10 punti).** Elencare esplicitamente un insieme di generatori per $\pi_1(\tilde{X}, e_0)$.

   (b) **(10 punti).** Descrivere $p_*\pi_1(\tilde{X}, e_0)$.

   (c) **(10 punti).** Descrivere l'azione di $\pi_1(X, e)$ sulla fibra del punto centrale $p^{-1}(e)$.