Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2015–2016 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 1
30 settembre 2016

1. Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive.

a) $$\begin{aligned}\phi_1\colon \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q}\\ x &\longmapsto \begin{cases}\frac{1}{x^3} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\phi_2\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \begin{cases}\sqrt{x} & \text{se } x>0\\ 2-x & \text{se } x\leq 0\end{cases}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\phi_3\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{x}{x-2}\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\phi_4\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto 3x^2-12x^2+9x-7\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\phi_5\colon \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \mathbb{N}^+\\ n &\longmapsto n\text{-esima cifra decimale di } \sqrt{2}\end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned}\phi_5\colon \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \{1,2,\dots,10\}\\ n &\longmapsto n\text{-esima cifra decimale di } \pi\end{aligned}$$

2. Sia X un insieme; siano $\mathcal{F}(X)$ e $\mathcal{S}(X)$, rispettivamente, l'insieme delle funzioni e l'insieme delle funzioni biunivoche da X a X. Sia $\circ$ la composizione di funzioni.
   a) Verificare che $(\mathcal{F}(X,X),\circ)$ è un monoide.
   b) Dimostrare che $(\mathcal{S}(X),\circ)$ è un gruppo.
   c) Caratterizzare quando $(\mathcal{F}(X,X),\circ)$ è commutativo e/o un gruppo.
   d) Sia $\mathcal{A}(X) := \{\phi\in\mathcal{S}(X) \mid \phi(x)\neq x \text{ per un numero finito di } x\in X\}$. Dimostrare che $\mathcal{A}(X)$ è un gruppo.

3. Dare un esempio di un'operazione binaria $\circ$ che è commutativa, ha un elemento neutro e tale che ogni elemento ha un inverso, ma che non è associativa.

4. Siano $\cdot$ e $*$ le operazioni su $\mathbb{R}$ definite da $a\cdot b := ab$ e $a*b=a^b$. Determinare se $(\mathbb{R},\cdot,*)$ e $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot,*)$ sono anelli.

5. In ognuno dei seguenti casi, dire se Y è un sottogruppo di $(X,\circ)$:
   a) $X=\mathbb{Z}$, $Y=\mathbb{N}$, $\circ$=somma
   b) $X=\{\text{matrici invertibili di ordine } n \text{ su } K\}$, $Y=\{M\in X \mid M \text{ è triangolare superiore}\}$, $\circ$=prodotto tra matrici
   c) $X=\mathbb{Q}$, $Y=3\mathbb{Z}=\{3z\mid z\in\mathbb{Z}\}$, $\circ$=somma
   d) $X=\mathbb{Q}$, $Y=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\circ$=somma
   e) $X=\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, $Y=\{\phi\in X\mid \phi(1)=1\}$, $\circ$=composizione di funzioni
   f) $X=\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, $Y=\{\phi\in X\mid \phi(1)=2\}$, $\circ$=composizione di funzioni

6. Determinare le proprietà delle seguenti strutture algebriche $(X,\circ)$:

a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $a \circ b = \sup\{a, b\}$

b) $X = \mathbb{N}$, $\circ$ =somma

c) $X = \mathbb{Z}$, $\circ$ =somma

d) $X = \mathbb{R}^{\geq 0}$, $a \circ b = \sqrt{a^2 + b^2}$

e) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

f) $X = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\circ$ =somma di matrici

g) $X = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\circ$ =prodotto tra matrici

h) $X_r = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ ha rango } r\}$, per $r = 1, \ldots, n$; $\circ$ =prodotto tra matrici

i) $X = \{\phi : V \longrightarrow V \mid \phi|_W = id_W\}$ (con V spazio vettoriale e $W \subsetneq V$ sottospazio), $\circ$ =composizione di funzioni

7. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili su $\mathbb{Z}$ e/o su $\mathbb{Q}$:

a) $X^2 - 3X + 1$

b) $2X^2 - 2$

c) $6X^3 - 7X$

d) $2X^3 - 7X^2 + 2X - 1$

8. Trovare:

a) 6 mod 4

b) 12 mod 7

c) 127 mod 3

d) 199 mod 4

e) 4566 mod 3

f) -6 mod 14

9. Trovare le unità di $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{11}$, $\mathbb{Z}_{12}$ e $\mathbb{Z}_{28}$.

10. Calcolare, se possibile, l'inverso dei seguenti numeri:

a) 4 mod 7

b) 11 mod 8

c) 3 mod 12

d) 3 mod 13

e) 2 mod 9

f) 16 mod 12

11. Dimostrare o dare un controesempio:

a) un polinomio monico è irriducibile su $\mathbb{Q}$ se e solo se è irriducibile su $\mathbb{Z}$;

b) se a e b sono coprimi con n, allora $a + b$ è coprimo con n;

c) se a e b sono coprimi con n, allora $a \cdot b$ è coprimo con n;

d) $\mathrm{MCD}(a, n) \cdot \mathrm{MCD}(b, n) = \mathrm{MCD}(ab, n)$;

e) la composizione di due funzioni iniettive è ancora iniettiva;

f) la composizione di due funzioni suriettive è ancora suriettiva;

g) se $f : X \longrightarrow Y$ è iniettiva e $g : Y \longrightarrow Z$ è suriettiva, allora $f \circ g$ è iniettiva;

h) due unità diverse di $\mathbb{Z}_n$ possono avere lo stesso inverso.

12. Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri naturali, e sia S il sottomonoide di $\mathbb{N}$ generato da $a_1, \ldots, a_n$. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{N} \setminus S$ è finito.