Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 10
12 dicembre 2016

1. Trovare un generatore per i seguenti ideali di $\mathbb{Z}[i]$:

   a) $(7+9i, 5-i)$

   b) $(8+6i, -2+36i)$

   c) $(169-13i, 9+7i)$

   d) $(6+4i, 8-4i)$

   e) $(10+10i, 14+8i, 39+13i)$

2. Sia p un numero primo dispari. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

   (i) p non è un elemento primo di $\mathbb{Z}[i]$;

   (ii) esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $p = a^2 + b^2$;

   (iii) $p \equiv 1 \bmod 4$.

3. Sia d un intero diverso da 0 e 1, e consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. (se $d < 0$, $\sqrt{d} := i\sqrt{-d}$.) La *norma* in A è la funzione

$$\begin{aligned} N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{d}] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{d} &\longmapsto a^2 - b^2 d \end{aligned}$$

   a) Dimostrare che x divide $N(x)$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

   b) Dimostrare che $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

   c) Dimostrare che x è un'unità di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ se e solo se $N(x) = \pm 1$.

   d) Siano a, b interi coprimi. Dimostrare che $(a+b\sqrt{d})\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \cap \mathbb{Z} = N(a+b\sqrt{d})\mathbb{Z}$.

4. Sia d un intero. Dimostrare che il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

5. Consideriamo il dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

   a) Verificare che non esistono elementi di norma 2.

   b) Verificare che 2, $1+\sqrt{-7}$ e $1-\sqrt{-7}$ sono elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

   c) Dimostrare che questi tre elementi non sono primi.

   d) Trovare un elemento di $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ con due fattorizzazioni distinte.

   e) Dimostrare che l'ideale $(2, 1+\sqrt{-7})$ non è principale.

6. Consideriamo il dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

   a) Verificare che non esistono elementi di norma 3.

   b) Dedurne che 3 è irriducibile in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

   c) Dimostrare che 3 è primo in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.