Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 11
19 dicembre 2016

II esonero, A.A. 2013/2014

1. Sia G un gruppo con centro $Z := Z(G)$. Mostrare che, per ogni automorfismo $\phi : G \longrightarrow G$, si ha $\phi(Z) = Z$.

2. Si consideri l'ideale $I_n := (n, X) \subseteq \mathbb{Z}[X]$.

   a) Mostrare che l'applicazione

   $$\begin{aligned} \mathbb{Z}[X] &\longrightarrow \mathbb{Z}_n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i X^i &\longmapsto \overline{a_0} \end{aligned}$$

   è un omomorfismo suriettivo di anelli il cui nucleo è I_n.

   b) Determinare per quali valori di n l'ideale I_n è primo e/o massimale in $\mathbb{Z}[X]$.

3. Siano $\alpha := 11 + 3i$, $\beta := 1 + 8i$, $\gamma := 5 - 8i \in \mathbb{Z}[i]$.

   a) Determinare un massimo comun divisore tra α e β.

   b) Determinare gli zero divisori dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\beta)$.

   c) Determinare se la classe $\gamma + (\beta)$ è invertibile in $\mathbb{Z}[i]/(\beta)$.

4. Stabilire se l'ideale $(X^2, 5X)$ è principale negli anelli $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$, giustificando le risposte.

5. Determinare i fattori irriducibili di 14 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$. Stabilire inoltre se $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ è o no a fattorizzazione unica.

Appello B, A.A. 2013/2014

1. Sia G un gruppo moltiplicativo e si consideri l'applicazione

   $$\begin{aligned} \phi\colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^2 \end{aligned}$$

   a) Mostrare che ϕ è un omomorfismo se e solo se G è commutativo.

   b) Mostrare che, se G è un gruppo commutativo finito di ordine dispari, ϕ è biettivo.

2. Determinare tutti gli omomorfismi di gruppi da S_3 a $\mathbb{Z}_6$.

3. Sia A un anello unitario e sia I l'ideale di A generato dal sottoinsieme $C := \{xy - yx \mid x, y \in A\}$.
   a) Verificare che l'anello quoziente A/I è commutativo.
   b) Mostrare che, se J è un ideale di A e A/J è commutativo, allora $I \subseteq J$.

4. Sia $\omega \neq 1$ una radice terza dell'unità e sia $A := \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   a) Dimostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{C}$.
   b) Data l'applicazione
   $$\begin{aligned} N\colon A &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a + b\omega &\longmapsto a^2 + b^2 - ab, \end{aligned}$$
   dimostrare che $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in A$.
   c) Usare N per determinare gli elementi invertibili di A.
   d) Stabilire se l'elemento $1 + 2\omega$ è irriducibile in A.

5. Si considerino nell'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[X]$ gli ideali $I := (f(X))$ e $J := (g(X))$, dove
   $$f(X) := 2X^3 + X^2 + X - 1$$
   $$g(X) := 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2.$$
   a) Determinare un generatore per gli ideali $I + J$ e $I \cap J$.
   b) Stabilire se gli anelli quoziente $\frac{\mathbb{Q}[X]}{I+J}$ e $\frac{\mathbb{Q}[X]}{I\cap J}$ sono integri e/o campi.