Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2015–2016 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

ESERCITAZIONE 2
3 OTTOBRE 2016

1. Trovare la struttura ciclica delle seguenti permutazioni, scriverle come prodotto di trasposizioni e dire se sono pari o dispari:

a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&6&4&2&5&7&1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&4&5&3&7&6&8\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&8&5&4&7&6&3\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&6&5&4&3&1&2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&5&6&8&1&3&2&7\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&5&1&6&7&8\end{pmatrix}$

2. Trovare la struttura ciclica delle seguenti permutazioni e scriverle in due modi diversi come prodotto di trasposizioni distinte:

a) $\sigma_1 := (124)(67)(13)(24)(462)$

b) $\sigma_2 := (56)(57)(56)(1234)(235)$

c) $\sigma_3 := (127)(34)(38612)(123654)$

d) $\sigma_4 := (365)(365)(254)(123)(245)(132)(421)$

Fare la stessa cosa per $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$, σ_3^2 e $\sigma_4 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.

3. Sia G un gruppo commutativo e sia $T(G) := \{g \in G \mid g^n = e \text{ per qualche } n \geq 1\}$.

a) Dimostrare che $T(G)$ è un sottogruppo di G.

b) Determinare $T(\mathbb{Z})$, $T(\mathbb{Z}_6)$ e $T(\mathbb{C}^\star)$ (dove $\mathbb{C}^\star$ è il gruppo moltiplicativo di $\mathbb{C}$).

c) $T(G)$ è commutativo?

d) Sia $G = GL_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici invertibili di ordine 2 su $\mathbb{R}$, e siano

$$M = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{pmatrix}0&2\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$$

Verificare che $M^2 = N^2 = I$, ma che $(MN)^n \neq I$ per ogni $n \geq 1$.

4. Determinare tutti i possibili gruppi di ordine 1, 2, 3 e 4 usando le tavole moltiplicative.

5. Calcolare l'ordine delle seguenti permutazioni:

a) $(12)(345)(345)(67)$
b) $(12)(23)(34)(14)$
c) $(123)(132)(742)(561)$
d) $(12367)(547)(231)(264)(361)(362514)$

6. Sia $\sigma := (1 \cdots n)$ un ciclo di S_{100}. Dimostrare che σ è pari se e solo se n è dispari.

7. Dimostrare che $V := \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ è un sottogruppo di S_4. È contenuto in A_4?

8. Stabilire se le seguenti coppie σ_1, σ_2 di permutazioni sono coniugate in S_n, ed in tal caso determinare un τ tale che $\tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma_2$:
   a) $\sigma_1 = (123)(56)(47)$, $\sigma_2 = (14763)$;
   b) $\sigma_1 = (12)(34)(56)$, $\sigma_2 = (14)(25)(36)$;
   c) $\sigma_1 = (1643)(257)$, $\sigma_2 = (3542)(678)$;
   d) $\sigma_1 = (12345)$, $\sigma_2 = (654321)$;
   e) $\sigma_1 = (12345)$, $\sigma_2 = (54321)$;
   f) $\sigma_1 = (12)(23)$, $\sigma_2 = (45)(37)$.

9. Sia G un gruppo finito e sia $H \subseteq G$. Dimostrare che se $ab \in H$ per ogni $a, b \in H$ allora H è un sottogruppo di G. La stessa proprietà vale per gruppi infiniti?