Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 3
10 ottobre 2016

1. Scrivere i seguenti numeri complessi in forma polare:

   a) 5 b) -7 c) i d) $2+2i$

2. Trovare le radici quinte di $-1+i$ e le radici settime di $2\sqrt{3}+3i$.

3. Determinare se i seguenti numeri complessi sono radici dell'unità, e in caso affermativo determinare il loro ordine:

   a) i d) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ g) $e^{\frac{4\pi i}{7}}$

   b) $i-1$ e) $3i$ h) $e^{2\pi}$

   c) $e^{2\pi i}$ f) $2\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$ i) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Sia $\mathbb{C}_\infty$ l'insieme delle radici dell'unità e sia $\mathbb{C}_{|1|} := \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$.
   a) Dimostrare che $T(\mathbb{C}_{|1|}) = \mathbb{C}_\infty$.
   b) $\mathbb{C}_{|1|}$ e $\mathbb{C}_\infty$ sono gruppi isomorfi?

5. Sia G un gruppo, $g\in G$. Dimostrare che l'ordine di g divide $|G|$.

6. Determinare l'ordine di tutti gli elementi e tutti i sottogruppi dei seguenti gruppi:

   a) $\mathbb{Z}_4$ d) D_4 g) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8)$

   b) $\mathbb{Z}_{12}$ e) S_3 h) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_9)$

   c) D_3 f) $\mathbb{Z}_{13}$ i) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$

7. In ognuno dei seguenti casi, descrivere le classi laterali destre e sinistre di H in G:
   a) $G=\mathbb{Z}_{12}$, $H=\{0,4,8\}$
   b) $G=S_4$, $H=\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$

8. Sia D_6 il gruppo delle simmetrie di un esagono regolare.
   a) Descrivere gli elementi di D_6 e determinare il loro ordine.
   b) Determinare tutti i sottogruppi di D_6, esplicitando quali sono ciclici.
   c) Determinare i sottogruppi normali di D_6.

9. Svolgere l'esercizio precedente per D_7, A_4 e il gruppo dei quaternioni Q.

10. Trovare tutti i possibili ordini degli elementi di S_8.

11. Trovare il più piccolo n tale che S_n contiene un elemento di ordine 10.

12. Dimostrare che due elementi qualsiasi di D_7 di ordine 2 generano l'intero gruppo.

13. Sia G un gruppo, e sia $\Omega_n := \{g \in G \mid g \text{ ha ordine } n\}$. Dimostrare che $\phi(n)$ divide la cardinalità di Ω_n (dove ϕ è la funzione di Eulero). Ω_n è un sottogruppo?

14. Dimostrare che:
    a) D_3 e S_3 sono isomorfi;
    b) D_4 e Q non sono isomorfi;
    c) D_6 e A_4 non sono isomorfi.

15. Determinare (a meno di isomorfismo) tutti i gruppi di ordine 6 e 8.

16. Siano a, b interi coprimi. Dimostrare che $\mathbb{Z}_{ab}$ è isomorfo al prodotto diretto di $\mathbb{Z}_a$ e $\mathbb{Z}_b$.

17. Sia G un gruppo e H, N due suoi sottogruppi.
    a) Dimostrare che, se H e N sono normali in G, allora $H \cap N$ è normale in G.
    b) Dimostrare che se N è normale in G allora $N \cap H$ è normale in H.
    c) È vero che se N è normale in G allora $N \cap H$ è sempre normale in G?

18. Sia G un gruppo di ordine $2n$ e H un sottogruppo di G di ordine n. Dimostrare che H è normale in G.