Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 4
17 ottobre 2016

1. Sia G un gruppo, e siano H e K due sottogruppi di G. Sia $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$.
   a) Dimostrare che se $HK = KH$ allora HK è un sottogruppo di G.
   b) Dare un esempio in cui $HK \neq KH$ e HK non è un sottogruppo di G.
   c) Dimostrare che se K è normale in G allora $HK = KH$.

2. Sia G un gruppo, e siano H e K due sottogruppi normali di G tali che $HK = G$ e $H \cap K = \{e\}$.
   a) Dimostrare che $hk = kh$ per ogni $h \in H$, $k \in K$.
   b) Dimostrare che, se $h_1k_1 = h_2k_2$, con $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$, allora $h_1 = h_2$ e $k_1 = k_2$.
   c) Dimostrare che G è isomorfo al prodotto diretto di H e K.

3. Dire quali dei seguenti gruppi sono isomorfi al prodotto diretto di due suoi sottogruppi non banali:

a) $\mathbb{Z}_6$	c) $\mathbb{Z}_{30}$	e) Q	g) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
b) $\mathbb{Z}_4$	d) D_5	f) D_6	h) S_3

4. Sia $V := \langle(12)(34), (13)(24)\rangle \subseteq S_4$. Dimostrare che V è normale in S_4.

5. Dimostrare che A_5 è l'unico sottogruppo normale di S_5.

6. Sia G un gruppo e H, N due suoi sottogruppi.
   a) Dimostrare che, se H e N sono normali in G, allora $H \cap N$ è normale in G.
   b) Dimostrare che se N è normale in G allora $N \cap H$ è normale in H.
   c) È vero che se N è normale in G allora $N \cap H$ è sempre normale in G?

7. Sia G un gruppo di ordine $2n$ e H un sottogruppo di G di ordine n. Dimostrare che H è normale in G.

8. Sia $Z(G) := \{x \in G \mid xg = gx \ \forall g \in G\}$ il *centro* di G.
   a) Dimostrare che G è abeliano se e solo se $Z(G) = G$.
   b) Dimostrare che ogni sottogruppo di $Z(G)$ è normale in G.

c) Dimostrare che $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.

d) Determinare $Z(D_4)$, $Z(D_5)$, $Z(D_6)$ e $Z(S_5)$.

9. Sia G un gruppo e g un elemento di ordine 2. Dimostrare che $\langle g \rangle$ è un sottogruppo normale se e solo se $g \in Z(G)$.

10. Sia G un gruppo, e sia $\mathrm{Aut}(G)$ l'insieme degli *automorfismi* di G, ovvero degli isomorfismi di G in sé.

    a) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(G)$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.

    b) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(S_3) \simeq S_3$.

    c) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \simeq S_3$.

11. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ è isomorfo al gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_n$.

12. Sia G un gruppo e $g \in G$. Dimostrare che la mappa

$$\begin{aligned} \gamma_g \colon G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

    è un automorfismo di G.

13. Un sottogruppo H di G è detto *caratteristico* se $\phi(H) \subseteq H$ per ogni $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$.

    a) Dimostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale.

    b) Dimostrare che il centro di G è un sottogruppo caratteristico.

    c) Trovare un esempio di un sottogruppo caratteristico H e un omomorfismo $\phi : G \longrightarrow G$ tale che $\phi(H) \nsubseteq H$.

14. Sia D_4 il gruppo diedrale di ordine 4.

    a) Determinare tutti i sottogruppi di D_4 e specificare quali sono normali.

    b) Determinare il quoziente D_4/N per ogni sottogruppo normale N.

    c) Determinare il gruppo degli automorfismi di D_4.

15. Dimostrare che il quoziente di un gruppo ciclico è ciclico.

16. Descrivere il gruppo quoziente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, e determinare l'ordine di un elemento $\frac{a}{b} + \mathbb{Z}$. È un gruppo ciclico?