**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Esercitazioni di AL210

**A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli**
**Esercitatore: Dario Spirito**

Esercitazione 5
25 ottobre 2016

1. Sia $\phi : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che, se $g, h \in G'$ sono nell'immagine di $\phi$, allora $\phi^{-1}(g)$ e $\phi^{-1}(h)$ hanno la stessa cardinalità.

2. Sia $\phi : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che, per ogni $g \in G$, l'ordine di $\phi(g)$ divide l'ordine di $g$.

3. Sia $G$ un gruppo, e sia $\mathrm{Aut}(G)$ l'insieme degli *automorfismi* di $G$, ovvero degli isomorfismi di $G$ in sé.
   a) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(G)$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.
   b) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(S_3) \simeq S_3$.
   c) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \simeq S_3$.

4. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ è isomorfo al gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_n$.

5. Sia $\phi$ la mappa
$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{2\pi i x} \end{aligned}$$
   a) Dimostrare che $\phi$ è un omomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
   b) Dimostrare che $\ker\phi = \mathbb{Z}$.
   c) Dimostrare che l'immagine di $\phi$ è $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
   d) Dedurne che $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
   e) Dedurne che $\mathbb{C}_\infty \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dove $\mathbb{C}_\infty$ è l'insieme delle radici dell'unità.

6. Sia $G$ un gruppo finito di ordine dispari e sia $n \geq 3$. Dimostrare che ogni omomorfismo da $S_n$ a $G$ è banale.

7. Un sottogruppo $H$ di $G$ è detto *caratteristico* se $\phi(H) \subseteq H$ per ogni $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$.
   a) Dimostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale.
   b) Dimostrare che il centro di $G$ è un sottogruppo caratteristico.
   c) Trovare un esempio di un sottogruppo caratteristico $H$ e un omomorfismo $\phi : G \longrightarrow G$ tale che $\phi(H) \nsubseteq H$.

8. Dati due gruppi $(G, \star)$ e $(G', *)$, sia $\hom(G, G')$ l'insieme degli omomorfismi di $G$ in $G'$. Sia $+$ l'operazione su $\hom(G, G')$ definita come

$$(\phi + \psi)(x) := \phi(x) * \psi(x) \quad \text{per ogni } x \in G.$$

   a) Dimostrare che $(\hom(G, G'), +)$ è un gruppo. Qual è il suo elemento neutro?
   b) Dimostrare che, se $G'$ è commutativo, lo è anche $\hom(G, G')$.
   c) $\mathrm{Aut}(G)$ è un sottogruppo di $\hom(G, G)$?

9. Calcolare $\hom(\mathbb{Z}_2, S_3)$ e $\hom(\mathbb{Z}_2, D_4)$.

10. Siano $a$ e $b$ numeri interi.
    a) Dimostrare che $\hom(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}_b) = \{e\}$ se $a$ e $b$ sono coprimi.
    b) Determinare il numero di omomorfismi suriettivi da $\mathbb{Z}_a$ a $\mathbb{Z}_b$.
    c) Determinare il numero di omomorfismi iniettivi da $\mathbb{Z}_a$ a $\mathbb{Z}_b$.
    d) Dimostrare che $\hom(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}_b)$ è sempre un gruppo ciclico e calcolare la sua cardinalità.
    e) Determinare esplicitamente gli elementi di $\hom(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6)$.

11. Sia $D_4$ il gruppo diedrale di ordine 4.
    a) Determinare tutti i sottogruppi di $D_4$ e specificare quali sono normali.
    b) Determinare il quoziente $D_4/N$ per ogni sottogruppo normale $N$.
    c) Determinare il gruppo degli automorfismi di $D_4$.
    d) Determinare tutti gli omomorfismi di $D_4$ in $D_4$.