Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 6
14 novembre 2016

1. Sia G un gruppo abeliano. Dimostrare che la mappa $\lambda\colon \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ tale che $\lambda(\overline{1})(g) = g^{-1}$ per ogni $g \in G$ è un automorfismo di gruppi.

2. Siano N e H due gruppi, e sia $\Psi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ un omomorfismo di gruppi. Denotiamo con $N \rtimes_\Psi H$ il prodotto cartesiano $N \times H$ dotato della seguente operazione:
$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) := (n_1\Phi(h_1)(n_2), h_1h_2).$$
Tale costruzione è detta *prodotto semidiretto* di N e H tramite Ψ.
   a) Dimostrare che $(e_N, e_H)(n, h) = (n, h) = (n, h)(e_N, e_H)$ per ogni $n \in N$, $h \in H$. (e_N ed e_H sono gli elementi neutri, rispettivamente, di N ed H.)
   b) Per ogni (n, h), trovare un (n', h') tale che $(n, h)(n', h') = (n', h')(n, h) = (e_N, e_H)$.
   c) Dimostrare che l'operazione così definita è associativa.
   d) Dedurne che $N \rtimes_\Psi H$ è un gruppo.
   e) Dimostrare che $N' := \{(n, e_H) \mid n \in N\}$ è un sottogruppo normale di $N \rtimes_\Psi H$.
   f) Dimostrare che $H' := \{(e_N, h) \mid h \in H\}$ è un sottogruppo di $N \rtimes_\Psi H$.

3. Sia G un gruppo, e siano N ed H due sottogruppi di G tali che:
   (a) $H \cap N = \{e\}$;
   (b) $HN = G$;
   (c) N è normale in G.

   Dimostrare che G è isomorfo al prodotto semidiretto $N \rtimes_\Psi H$, dove
$$\begin{aligned}\Psi\colon H &\longrightarrow \mathrm{Aut}(N)\\ h &\longmapsto \begin{aligned}\gamma_h\colon N &\longrightarrow N\\ n &\longmapsto h^{-1}nh\end{aligned}\end{aligned}$$

4. Dimostrare che il gruppo diedrale D_n è isomorfo al prodotto semidiretto di $\langle\sigma\rangle$ e $\langle\tau\rangle$ tramite la mappa λ definita nell'esercizio 1.

5. Dimostrare che, se $\Psi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ è l'omomorfismo banale, allora $N \rtimes_\Psi H \simeq N \times H$.