Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli
Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 7
21 novembre 2016

1. Determinare quali delle seguenti applicazioni $G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) \mapsto g * x$, sono azioni, e in particolare quali sono fedeli e quali sono transitive.
   a) $G = X$, $g * x := gx$
   b) $G = X$, $g * x := g^{-1}x$
   c) $G = X = D_5$, $g * x := \sigma g x$
   d) $G = (\mathbb{R}, +)$, $X = \mathbb{R}$, $g * x := g + x + 2$
   e) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $X = \mathbb{R}$, $g * x := gx$
   f) $G = (\mathbb{R}, +)$, $X = \mathbb{R}$, $g * x := gx$
   g) $G = GL_n(\mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}^n$, $A * v := Av$

2. Dimostrare che, se un gruppo G agisce su X, allora ogni sottogruppo di G agisce su X. Che rapporto c'è tra le orbite di X rispetto a G e le orbite rispetto ad H?

3. Sia G un gruppo e X un insieme su cui G agisce. Sia $\alpha \in G$ un elemento di ordine finito. Dimostrare che, per ogni $x \in X$, l'orbita di x è finita.

4. Sia G l'insieme delle isometrie del piano reale, e sia X l'insieme delle coppie di punti del piano.
   a) Dimostrare che la mappa $T * (x, y) := (Tx, Ty)$ è un'azione.
   b) Determinare l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X.

5. Sia $G := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{Z}_7, \det(M) = 1 \right\}$.
   a) Dimostrare che G agisce in modo naturale su $(\mathbb{Z}_7)^2$.
   b) Determinare il numero di orbite di quest'azione.
   c) Cosa succede se si sostituisce $\mathbb{Z}_7$ con un altro $\mathbb{Z}_p$ (p primo)?

6. Sia G un gruppo finito che agisce transitivamente su X.
   a) Dimostrare che X è finito.
   b) Dimostrare che esiste un $g \in G$ che non fissa alcun elemento di X.
   c) Dimostrare se, se $H \subsetneq G$ è un sottogruppo, allora $G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.

7. Sia G un gruppo che agisce su X. Dimostrare che, se $x, y \in X$ sono nella stessa orbita, i sottogruppi $\mathrm{Stab}(x)$ e $\mathrm{Stab}(y)$ sono coniugati.

8. Sia Q il gruppo dei quaternioni, e consideriamo l'azione di Q in sé data dal coniugio. Determinare l'orbita e lo stabilizzatore di tutti gli elementi di Q e verificare l'equazione delle classi per Q.

9. Svolgere l'esercizio precedente per i gruppi D_4, S_3 e A_4.

10. Sia G un gruppo finito e H un suo sottogruppo. Sia $X := \{gH \mid g \in G\}$ l'insieme dei laterali sinistri di H. Sia $n := [G : H] = |X|$
    a) Dimostrare che la mappa $g * g'H := gg'H$, è un'azione di G su X.
    b) Usare questa azione per definire un omomorfismo naturale $\Psi : G \longrightarrow S_n$.
    c) Dimostrare che $\ker \Psi$ è il più grande sottogruppo normale contenuto in H.

11. Sia G un gruppo, H un sottogruppo, e sia $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ il *normalizzante* di G in H.
    a) Dimostrare che $N_G(H)$ è un sottogruppo di G contenente H.
    b) Dimostrare che H è normale in $N_G(H)$.
    c) Dimostrare che il numero dei coniugati di H è uguale all'indice $[G : N_G(H)]$ del normalizzante di G in H.

12. Determinare tutti i sottogruppi di Sylow di S_3, S_4, S_5, A_4, D_4 e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5$.

13. Sia p un primo dispari e G un gruppo di ordine $2p^n$. Dimostrare che esiste un unico p-Sylow.

14. Dimostrare che un gruppo abeliano finito è isomorfo al prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow. Dare un esempio di gruppo non abeliano in cui questo vale e di uno in cui questo non vale.

15. Un gruppo è *semplice* se non ha sottogruppi normali non banali. Dimostrare che:
    a) gli unici p-gruppi finiti semplici sono i $\mathbb{Z}_p$;
    b) S_n non è semplice per ogni $n > 2$;
    c) se G è semplice, G non è un prodotto diretto né semidiretto (non banale);
    d) se G ha un sottogruppo $H \neq \{e\}$ tale che $1 < [G : H] \leq 4$, allora G non è semplice.

16. Dimostrare che non esistono gruppi semplici di ordine 12, 55, 56, 80 o 1001.

17. Dato un gruppo finito G, sia $b(G)$ il minimo intero n tale che G è isomorfo ad un sottogruppo di S_n.
    a) Dimostrare che, se G è un p-gruppo, allora $p | b(G)$.
    b) Dimostrare che $b(Q) = 8$.