Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2016–2017 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 8
28 novembre 2016

1. Dati i seguenti insiemi A e B (con le operazioni naturali), determinare se B è un sottoanello e/o un ideale di A.
   a) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$
   b) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \in A \mid \det(M) = 0\}$
   c) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \in A \mid M\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ (dove $\mathbf{v}$ è un fissato elemento di $\mathbb{R}^n$).
   d) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
   e) $A = \{\text{funzioni } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $B = \{\text{funzioni continue}\}$.
   f) $A = \{\text{funzioni continue } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $B = \{f \in A \mid f(1) = 0\}$.
   g) $A = (\mathcal{P}(S), \Delta, \cap)$, $B = \mathcal{P}(X)$, dove $X \subseteq S$, $\mathcal{P}$ è l'insieme delle parti e Δ la differenza simmetrica.

2. Dimostrare che $4\mathbb{Z}_{12}$ è un anello unitario, ma che $2\mathbb{Z}_{12}$ non lo è.

3. Sia A un anello e siano I, J ideali (entrambi destri o entrambi sinistri) di A. Dimostrare che i seguenti insiemi sono ideali di A:
   a) $I \cap J$;
   b) $I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$;
   c) $IJ := \{\sum i_1 j_1 + \cdots + i_n j_n \mid i_t \in I, j_t \in J\}$.

4. Determinare l'insieme degli elementi invertibili dei seguenti anelli:
   a) $\mathbb{Z}$
   b) $\mathbb{Q}$
   c) $\mathbb{C}$
   d) $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
   e) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i] := \{a + b\sqrt{3}i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
   f) $M_n(\mathbb{R})$
   g) $M_n(\mathbb{Z})$
   h) $A := \mathbb{Z}_{(12)} := \{\frac{a}{12^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
   i) $A := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 3 \nmid b\}$
   j) $\mathbb{Q}[X]$

5. Sia $\phi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli e I un ideale di B.
   a) Dimostrare che $\phi^{-1}(I)$ è un ideale di A.
   b) Dimostrare che, se I è primo e $\phi(A) \nsubseteq I$, allora $\phi^{-1}(I)$ è un ideale primo.
   c) Dare un esempio in cui $\phi(A) \nsubseteq I$ e I è massimale, ma $\phi^{-1}(I)$ no.

6. Sia $a \in A$. L'*ideale (destro) principale* generato da a è l'insieme $aA := \{ab \mid b \in A\}$.
   a) Dimostrare che aA è un ideale.
   b) Dimostrare che, se A è un anello unitario, allora aA è il più piccolo ideale destro contenente a.
   c) Dimostrare che, se A è commutativo e unitario, allora $aA \cdot bA = abA$.
7. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$, sottolineando in particolare quali sono primi e quali sono massimali. Determinare anche, per ogni I e J, la somma $I + J$ e l'intersezione $I \cap J$.
8. Sia $A := \mathbb{Z}[i]$, e siano $I := (1 + 3i)$, $J := (3 - 3i)$ e $K := (4 + i)$. Determinare la somma e l'intersezione di ogni coppia di questi ideali.
9. Sia $A := \mathbb{Q}[X, Y]$. Dimostrare che l'insieme $I := \{f \in \mathbb{Q}[X, Y] \mid f$ non ha termine noto$\}$ è un ideale di A; determinare un insieme di generatori per I e dimostrare che I non è un ideale principale.
10. Sia A un anello unitario. Un elemento $a \in A$ è *idempotente* se $a^2 = a$. Mostrare che:
    a) se a è idempotente, allora $1 - a$ è idempotente;
    b) se a è idempotente e $a \neq 1$, allora a è un divisore dello zero;
    c) se a è idempotente, allora $A \simeq aA \times (1 - a)A$.
11. Sia A un anello e sia I un ideale. Il *radicale* di I è l'insieme $\mathrm{rad}(I) := \{a \in A \mid a^n \in I \text{ per un } n \in \mathbb{N}\}$.
    a) Dimostrare che $\mathrm{rad}(\mathrm{rad}(I)) = \mathrm{rad}(I)$.
    b) Dimostrare che, se A è commutativo, allora $\mathrm{rad}(I)$ è un ideale.
    c) Dare un esempio di un anello non commutativo in cui $\mathrm{rad}((0))$ non è un ideale.
12. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $n = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ la sua fattorizzazione. Dimostrare che $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{a_n}}$.
13. Determinare se i seguenti sono omomorfismi di anelli e, in caso affermativo, determinare nucleo e immagine e definire l'isomorfismo canonico dato dal teorema fondamentale di omomorfismo.
    a) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $k \mapsto \overline{k}$.
    b) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[X]$, $k \mapsto kX$
    c) $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{C}[X]$, $k \mapsto k + X$
    d) $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_n[X]$, $\sum a_i X^i \mapsto \sum \overline{a_i} X^i$
    e) $\mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto f(\sqrt{5})$
    f) $\mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, $a + bi \mapsto \overline{a^2 + b^2}$