Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 1
2 ottobre 2017

1. Determinare se le seguenti funzioni sono ben definite.

a) $\begin{aligned} f_1\colon \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a/b &\longmapsto a \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} f_2\colon \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a/b &\longmapsto a^2/b^2 \end{aligned}$

2. Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive.

a) $\begin{aligned} \phi_1\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x^3+2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \phi_2\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ 3-2x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \phi_3\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x^2+y, xy) \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \phi_4\colon \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \mathbb{N}^+ \\ n &\longmapsto \{\text{divisore primo più piccolo di } n\} \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \phi_5\colon \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \{0,1,\dots,9\} \\ n &\longmapsto n\text{-esima cifra decimale di } \sqrt{2} \end{aligned}$

3. In ognuno dei seguenti casi, dire se $\sim$ è una relazione di equivalenza su X.
   a) $X = \mathbb{Z}$, $a \sim b :\iff 5|ab$.
   b) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a,b) \sim (c,d) :\iff ad = bc$.
   c) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$, $(a,b) \sim (c,d) :\iff ad^2 = bc^2$.
   d) $X = \mathbb{Z}$, $a \sim b :\iff$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a|b^n$.
   e) $X = \mathbb{Z}_8$, $a \sim b :\iff a^3 = b^5$.
   f) $X = \mathbb{Z}$, $a \sim b :\iff 2|(a+b)$.

4. Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione suriettiva. Sia ρ la relazione su A definita nel seguente modo:
$$a\rho b \quad \text{se e solo se} \quad f(a) = f(b).$$
   a) Dimostrare che ρ è una relazione di equivalenza.
   b) Descrivere le classi di equivalenza di ρ.
   c) Dimostrare che f induce una funzione biunivoca $f^* : A/\rho \longrightarrow B$.
   d) Cosa succede se f non è suriettiva?

5. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili su $\mathbb{Z}$ e/o su $\mathbb{Q}$:

a) $X^2 - 3X + 1$
b) $2X^2 - 2$
c) $2X$
d) $6X^3 - 7X$
e) $X^3 - X^2 - 4$
f) $5X^2 + 15$
g) $X^2 + 3X + 6$
h) $2X^2 + 6X + 30$
i) $2X^3 - 3X^2 + 2 + 1$
j) $X^5 + 5X^4 + 10X^3 - 65X^2 + 25X - 5$

6. Trovare:

   a) $14 \bmod 4$
   b) $15 \bmod 8$
   c) $197 \bmod 7$
   d) $-66 \bmod 6$
   e) $1258746 \bmod 5$
   f) $-6 \bmod 13$

7. Trovare le unità di $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_{13}$ e $\mathbb{Z}_{28}$.

8. Calcolare, se possibile, l'inverso dei seguenti numeri:

   a) $5 \bmod 7$
   b) $13 \bmod 6$
   c) $9 \bmod 12$
   d) $9 \bmod 13$
   e) $4 \bmod 9$
   f) $119 \bmod 7$

9. Dare un esempio di operazione 6-aria su $\mathbb{Q}$.

10. Sia X un insieme, e sia $\mathcal{F}(X, X)$ l'insieme delle funzioni da X a X. Sia $\circ$ la composizione di funzioni.
    a) Verificare che $(\mathcal{F}(X, X), \circ)$ è un monoide.
    b) Determinare l'insieme degli elementi invertibili di $(\mathcal{F}(X, X), \circ)$.
    c) Dimostrare che non esiste alcuna operazione $\oplus$ su $\mathcal{F}(X, X)$ tale che $(\mathcal{F}(X, X), \oplus, \circ)$ è un anello.

11. Sia $\mathcal{S}(X)$ l'insieme delle funzioni biunivoche $\phi : X \longrightarrow X$, e sia $\operatorname{fix}(\phi) := \{x \in X \mid \phi(x) = x\}$.
    a) Dimostrare che $(\mathcal{S}(X), \circ)$ è un gruppo.
    b) Dimostrare che, per ogni $Y \subseteq X$, l'insieme $\{\phi \in \mathcal{S}(X) \mid Y \subseteq \operatorname{fix}(\phi)\}$ è un sottogruppo di $(\mathcal{S}(X), \circ)$.
    c) Dimostrare che l'insieme $\{\phi \in \mathcal{S}(X) \mid X \setminus \operatorname{fix}(\phi) \text{ è finito}\}$ è un sottogruppo di $(\mathcal{S}(X), \circ)$.
    d) L'insieme $\{\phi \in \mathcal{S}(X) \mid \operatorname{fix}(\phi) = Y\}$ è un sottogruppo?

12. Dare un esempio di un'operazione binaria $\circ$ che è commutativa, ha un elemento neutro e tale che ogni elemento ha un inverso, ma che non è associativa.

13. In ognuno dei seguenti casi, dire se Y è un sottogruppo di $(X, \circ)$:
    a) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}$, $\circ$=somma

b) $X = \{$matrici invertibili di ordine n su $K\}$, $Y = \{M \in X \mid M$ è triangolare inferiore$\}$, $\circ$=prodotto tra matrici

c) $X = \mathbb{Q}$, $Y = 4\mathbb{Z} = \{4z \mid z \in \mathbb{Z}\}$, $\circ$=somma

d) $X = \mathbb{Q}$, $Y = 4\mathbb{Z} + 1 = \{4z + 1 \mid z \in \mathbb{Z}\}$, $\circ$=somma

e) $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\circ$=somma

f) $X = \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, $Y = \{\phi \in X \mid \phi(1) = 1\}$, $\circ$=composizione di funzioni

g) $X = \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, $Y = \{\phi \in X \mid \phi(1) = 2\}$, $\circ$=composizione di funzioni

14. Scrivere la tabella moltiplicativa delle seguenti strutture algebriche $(X, \circ)$, e usarla per determinarne le properietà:

    a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $a \circ b := \sup\{a, b\}$

    b) $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $a \circ b := |a| - |b|$

    c) $X = \{1, -1, i, -i\}$, $a \circ b := ab$ (i è l'unità immaginaria)

15. Determinare le proprietà delle seguenti strutture algebriche $(X, \circ)$:

    a) $X = \mathbb{N}$, $\circ :=$somma

    b) $X = \mathbb{Z}$, $\circ :=$somma

    c) $X = \mathbb{R}^{\geq 0}$, $a \circ b := \sqrt{a^2 + b^2}$

    d) $X = \mathbb{R}^2$, $a \circ b := a^2 + b^2 - 1$

    e) $X = \{\phi : V \longrightarrow V \mid \phi|_W = id_W\}$ (con V spazio vettoriale e $W \subsetneq V$ sottospazio), $\circ$ =composizione di funzioni

16. Dimostrare o dare un controesempio:

    a) un polinomio monico è irriducibile su $\mathbb{Q}$ se e solo se è irriducibile su $\mathbb{R}$;

    b) se a e b sono coprimi con n, allora $a + b$ è coprimo con n;

    c) se a e b sono coprimi con n, allora $a \cdot b$ è coprimo con n;

    d) $\mathrm{MCD}(a, n) \cdot \mathrm{MCD}(b, n) = \mathrm{MCD}(ab, n)$;

    e) la composizione di due funzioni iniettive è ancora iniettiva;

    f) la composizione di due funzioni suriettive è ancora suriettiva;

    g) se $f : X \longrightarrow Y$ è iniettiva e $g : Y \longrightarrow Z$ è suriettiva, allora $f \circ g$ è iniettiva;

    h) due unità diverse di $\mathbb{Z}_n$ possono avere lo stesso inverso.

17. Sia $M_2(\mathbb{Z})$ l'insieme delle matrici di ordine 2 a coefficienti interi.

    a) Dimostrare che $M_2(\mathbb{Z})$, con le operazioni di somma e prodotto tra matrici, è un anello.

    b) Determinare gli zerodivisori di $M_2(\mathbb{Z})$.

    c) Determinare gli elementi nilpotenti di $M_2(\mathbb{Z})$.

d) Determinare gli elementi invertibili di $M_2(\mathbb{Z})$.

18. Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri naturali coprimi, e sia S il sottomonoide di $\mathbb{N}$ generato da $a_1, \ldots, a_n$. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{N} \setminus S$ è finito.