Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 10
18 dicembre 2017

1. Trovare un generatore per i seguenti ideali di $\mathbb{Z}[i]$:

   a) $(5+3i, 27-11i)$

   b) $(19+4i, 13)$

   c) $(6+i, 12+3i)$

   d) $(6+4i, 8-4i)$

   e) $(1+3i, 5-5i, 4-2i)$

   f) $(4+17i, 99-4i)$

2. Sia p un numero primo dispari. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

   (i) p non è un elemento primo di $\mathbb{Z}[i]$;

   (ii) esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $p = a^2 + b^2$;

   (iii) $p \equiv 1 \bmod 4$.

3. Sia d un intero privo di quadrati e diverso da 0 e 1, e consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. (Se $d < 0$, $\sqrt{d} := i\sqrt{-d}$.) La *norma* in A è la funzione

$$\begin{aligned} N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{d}] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{d} &\longmapsto a^2 - b^2 d \end{aligned}$$

   a) Dimostrare che x divide $N(x)$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

   b) Dimostrare che $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

   c) Dimostrare che x è un'unità di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ se e solo se $N(x) = \pm 1$.

   d) Siano a, b interi coprimi. Dimostrare che $(a+b\sqrt{d})\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \cap \mathbb{Z} = N(a+b\sqrt{d})\mathbb{Z}$.

4. Consideriamo il dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

   a) Verificare che non esistono elementi di norma 2.

   b) Verificare che 2, $1+\sqrt{-7}$ e $1-\sqrt{-7}$ sono elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

   c) Dimostrare che questi tre elementi non sono primi.

   d) Trovare un elemento di $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ con due fattorizzazioni distinte.

   e) Dimostrare che l'ideale $(2, 1+\sqrt{-7})$ non è principale.

5. Sia $d > 1$ un intero dispari. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ non è a fattorizzazione unica.

6. Sia d un intero. Dimostrare che il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

7. Consideriamo il dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
   a) Verificare che non esistono elementi di norma 3.
   b) Dedurne che 3 è irriducibile in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
   c) Dimostrare che 3 è primo in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.