Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli
Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 11
19 dicembre 2017

0. Sia ϕ la mappa
$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{Q}[X] &\longrightarrow \mathbb{C}\\ f(X) &\longmapsto f(\sqrt[3]{2}).\end{aligned}$$
Dimostrare che ϕ è un omomorfismo, determinarne nucleo e immagine e stabilire se il nucleo è un ideale primo.

II esonero, A.A. 2016-2017

1. Si consideri l'applicazione
$$\begin{aligned}\alpha\colon (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\\ (M, v) &\longmapsto Mv\end{aligned}$$
Dimostrare che α è un'azione transitiva di gruppi.

2. Determinare gli ideali primi dell'anello quoziente $\frac{\mathbb{Z}}{(60)}$.

3. Si consideri il sottoinsieme
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ 3y & x \end{pmatrix} \; ; \; x, y \in \mathbb{Z} \right\}$$
dell'anello $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
   a) Verificare che A è un anello.
   b) Verificare che l'applicazione
$$\begin{aligned}f\colon A &\longrightarrow \mathbb{Z}_9\\ \begin{pmatrix} x & 3y \\ 3y & x \end{pmatrix} &\longmapsto [x]_9\end{aligned}$$
   è un omomorfismo di anelli.
   c) Determinare il nucleo $\ker(f)$ e verificare che esso è un ideale principale.
   d) Stabilire se $\ker(f)$ è un ideale primo di A.

4. Sia $\mathbb{Z}[i] = \{x + yi;\, x, y \in \mathbb{Z}\}$ l'anello degli interi di Gauss e sia $I \subset \mathbb{Z}[i]$ l'ideale generato da $\alpha = -5 + 12i$.
   a) Stabilire se le classi modulo I degli elementi $\beta = -1 + 5i$ e $\gamma = 3 - 5i$ sono invertibili nell'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]/I$.
   b) Mostrare che A ha un unico ideale proprio non nullo J.
   c) Stabilire se A/J è un campo.

5. Dato un anello A, sia $\mathrm{Aut}(A)$ l'insieme degli automorfismi di A, ovvero degli isomorfismi di A in sé.

a) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(A)$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.

b) Dimostrare che l'unico automorfismo di $\mathbb{Z}_n$ (come anello) è l'identità.

c) Dimostrare che la mappa

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{Z}[i] &\longrightarrow \mathbb{Z}[i] \\ a+bi &\longmapsto a-bi \end{aligned}$$

è un automorfismo di $\mathbb{Z}[i]$.

6. Sia I il sottoinsieme di $\mathbb{Z}[X]$ formato dai polinomi $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ tali che $25|a_0$ e $5|a_1$.

   a) Dimostrare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$.

   b) Stabilire se I è un ideale primo e/o massimale.

   c) Dimostrare che I non è un ideale principale.

Appello B, A.A. 2015-2016

1. Si consideri il gruppo $G := \mathbb{Z}_2 \times D_4$.

   a) Determinare i possibili periodi degli elementi di G, esibendo un elemento per ogni periodo.

   b) Calcolare $Z(G)$ e stabilire se G è abeliano.

   c) Determinare un sottogruppo di G isomorfo al gruppo di Klein.

   d) Spiegare perché G non contiene gruppi isomorfi a S_3 o a $\mathbb{Z}_8$.

2. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \times \mathbb{Z}_{12} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ (\phi, x) &\longmapsto \phi(x). \end{aligned}$$

   a) Stabilire se f è un'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$ su $\mathbb{Z}_{12}$.

   b) Calcolare tutte le orbite di f.

   c) Calcolare lo stabilizzatore di $[3]_{12}$.

3. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f_{a,n}\colon \mathbb{Z}[i] &\longrightarrow \mathbb{Z}_n \\ x+iy &\longmapsto [a(x^2+y^2)]_n. \end{aligned}$$

   a) Si dica per quali valori di a e di n $f_{a,n}$ è un omomorfismo di anelli.

   b) Si consideri $f_{1,2}$: dire se è un omomorfismo e, in caso affermativo, determinarne nucleo e immagine.

4. Sia $A = \mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$. Per ciascuno degli ideali

$$I := (X^2+X+1, X+1), \quad J := (X^2+X+2, X+1)$$

   si stabilisca se è proprio, se è primo e se è massimale.

5. Si consideri il polinomio

$$f(X) := X^6 + X^5 + 2X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

   e sia ω una radice terza primitiva dell'unità. Sapendo che ω è radice di $f(X)$, si determini l'espansione di $f(X)$ come prodotto di fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$.