Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli
Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 2
9 ottobre 2017

1. Trovare la struttura ciclica delle seguenti permutazioni, scriverle come prodotto di trasposizioni e dire se sono pari o dispari:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

2. Trovare la struttura ciclica delle seguenti permutazioni e scriverle in due modi diversi come prodotto di trasposizioni:

a) $\sigma_1 := (123)(12)(28)(56)(2469)$

b) $\sigma_2 := (43)(21)(4312)(56)(15)$

c) $\sigma_3 := (12874)(13)(15)(546)$

d) $\sigma_4 := (12)(13)(12)(45)(35)(45)(12)(13)(12)(12)$

e) $\sigma_5 := (1234)(4321)(1324)(1453)$.

Fare la stessa cosa per:

$$\sigma_1 \circ \sigma_2, \quad \sigma_2 \circ \sigma_1, \quad \sigma_3 \circ \sigma_1, \sigma_4^2, \quad \sigma_5^4 \quad \text{e} \quad \sigma_5 \circ \sigma_4 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1.$$

3. Calcolare l'ordine delle seguenti permutazioni, e dire se sono pari o dispari.

a) $(12)(34)(567)$

b) $(12)(34)(567)(31)$

c) $(123)(312)$

d) $(12368)(348)(57)(243)(423)(57)(834)(63218)$

4. Determinare tutti i possibili gruppi di ordine 1, 2, 3, 4 e 5 usando le tavole moltiplicative.

5. Usando le tavole moltiplicative, dimostrare che se G è un gruppo di ordine 6 con due elementi di ordine 2 allora G è isomorfo a S_3.

6. Per ogni n, trovare un sottogruppo di S_n isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.
7. Trovare almeno tre sottogruppi di S_5 isomorfi a D_5.
8. Trovare tutti i sottogruppi di S_3.
9. Dimostrare che non esistono elementi di ordine 7 in S_6.
10. Trovare tutti gli elementi di S_5 di ordine 6.
11. Calcolare l'ordine di tutti di elementi di D_6, S_4, $\mathbb{Z}_{13}$ e $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ (per $2 \leq m \leq 9$).
12. Dimostrare che, se $x^2 = e$ per ogni $x \in G$, allora G è commutativo.
13. Trovare quali dei seguenti insiemi sono sottogruppi di $(\mathbb{R}, +)$:
    a) $\mathbb{Q}$;
    b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
    c) $\{a + b\sqrt{2} : a, b, \in \mathbb{Z}\}$;
    d) $\{a + \sqrt{3} : a \in \mathbb{Q}\}$;
    e) $\{a\sqrt{7} : a \in \mathbb{Q}\}$;
    f) $\{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$.
14. Sia G un gruppo commutativo e sia $T(G) := \{g \in G \mid g^n = e \text{ per qualche } n \geq 1\}$.
    a) Dimostrare che $T(G)$ è un sottogruppo di G.
    b) Determinare $T(\mathbb{Z})$, $T(\mathbb{Z}_6)$, $T(\mathbb{Q}^\star)$ e $T(\mathbb{C}^\star)$ (dove $\mathbb{Q}^\star$ e $\mathbb{C}^\star$ sono i rispettivi gruppi moltiplicativi).
    c) $T(G)$ è commutativo?
    d) Sia $G = GL_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici invertibili di ordine 2 su $\mathbb{R}$, e siano
    $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
    Verificare che $M^2 = N^2 = I$, ma che $(MN)^n \neq I$ per ogni $n \geq 1$.
15. Sia G un gruppo finito e sia $H \subseteq G$. Dimostrare che se $ab \in H$ per ogni $a, b \in H$ allora H è un sottogruppo di G. La stessa proprietà vale per gruppi infiniti?