Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 3
16 ottobre 2017

1. Trovare le radici ottave di $1 - i$ e le radici none di $7 - 6i$.

2. Determinare se i seguenti numeri complessi sono radici dell'unità, e in caso affermativo determinare il loro ordine:

a) $-i$	d) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	g) $e^{i\pi^2}$
b) $i - 1$	e) $12i - 4$	h) $e^{2\pi}$
c) $e^{\pi i}$	f) $2 \cdot e^{\frac{2\pi i}{7}}$	i) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Trovare tutti gli isomorfismi tra $\mathbb{Z}_{12}$ e le radici dodicesime dell'unità.

4. Sia $\mathbb{C}_\infty$ l'insieme delle radici dell'unità e sia $\mathbb{C}_{|1|} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
   a) Dimostrare che $T(\mathbb{C}_{|1|}) = \mathbb{C}_\infty$.
   b) $\mathbb{C}_\infty$ è ciclico?
   c) Dimostrare che $\mathbb{C}_{|1|}$ e $\mathbb{C}_\infty$ non sono isomorfi.

5. Determinare quali di questi gruppi sono ciclici.

a) $(\mathbb{Z}, +)$	c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$	e) D_4
b) $(\mathbb{Q}, +)$	d) $(\mathbb{R}, +)$	f) A_3

   g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$, dove $(\overline{a}, \overline{b}) \oplus (\overline{c}, \overline{d}) = (\overline{a + c}, \overline{b + d})$
   h) $\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}, \cdot\right)$

6. Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{12}$, D_4, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8)$, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$.

7. Sia A_4 il gruppo alterno di ordine 4.
   a) Elencare gli elementi di A_4 e determinarne l'ordine.
   b) Dimostrare che gli elementi di ordine 2, insieme all'identità, formano un gruppo.
   c) Dimostrare che non esiste alcun sottogruppo di ordine 6.

8. Determinare geometricamente due sottogruppi di D_6 isomorfi a S_3.

9. Dimostrare che un gruppo infinito ha infiniti sottogruppi.

10. Dimostrare che la mappa
$$\begin{aligned}\gamma\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\\ a+ib &\longmapsto \begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\end{aligned}$$
(dove $a, b \in \mathbb{R}$) è un isomorfismo tra $\mathbb{C}$ e $\gamma(\mathbb{C})$.

11. Siano G, H due gruppi. All'interno del prodotto cartesiano $G \times H$ consideriamo l'operazione $\oplus$ definita da
$$(g_1, h_1) \oplus (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2).$$
Questa costruzione è detta il *prodotto diretto* di G e H.
    a) Dimostrazione che $(G \times H, \oplus)$ è un gruppo.
    b) Dimostrare che $G' := \{(g, 0) \mid g \in G\} \simeq G$ e che $H' := \{(0, h) \mid h \in H\} \simeq H$.
    c) Dimostrare che, se $a \in G'$ e $b \in H'$, allora $a \oplus b = b \oplus a$.
    d) Dimostrare che $G \times H$ e $H \times G$ sono isomorfi.
    e) Dimostrare che $G \times H$ è commutativo se e solo se lo sono sia G che H.

12. Sia G un gruppo con elemento neutro e; siano H_1, H_2 due suoi sottogruppi tali che:
    - $H_1 \cap H_2 = \{e\}$;
    - G è generato dagli elementi di H_1 e H_2.
    - per ogni $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, si ha $h_1 h_2 = h_2 h_1$.

    Dimostrare che G è isomorfo al prodotto diretto $H_1 \times H_2$.

13. Dimostrare che la mappa
$$\begin{aligned}\exp\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+\\ x &\longmapsto e^x\end{aligned}$$
è un isomorfismo tra $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Dedurne che $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ è isomorfo al prodotto diretto di $(\mathbb{R}, +)$ e $\mathbb{Z}_2$.

14. Trovare il più piccolo n tale che S_n contiene un elemento di ordine 14.

15. Dimostrare che due elementi qualsiasi di D_7 di ordine 2 generano l'intero gruppo. Quali altri D_n hanno questa proprietà?

16. Sia G un gruppo, e sia $\Omega_n := \{g \in G \mid g \text{ ha ordine } n\}$. Dimostrare che $\phi(n)$ divide la cardinalità di Ω_n (dove ϕ è la funzione di Eulero). Ω_n è un sottogruppo?