Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli

Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 4
23 ottobre 2017

1. Trovare tutti i sottogruppi normali di D_4, D_5, D_6, A_4, S_4, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$ e $D_5 \times \mathbb{Z}_3$.

2. Dimostrare che:
   a) D_3 e S_3 sono isomorfi;
   b) D_4 e Q non sono isomorfi;
   c) D_6 e A_4 non sono isomorfi.

3. Sia G un gruppo e H, N due suoi sottogruppi.
   a) Dimostrare che, se H e N sono normali in G, allora $H \cap N$ è normale in G.
   b) Dimostrare che se N è normale in G allora $N \cap H$ è normale in H.
   c) È vero che se N è normale in G allora $N \cap H$ è sempre normale in G?
   d) Dare un esempio in cui $H \subseteq N$, H è normale in N, N è normale in G ma H non è normale in G.

4. Sia G un gruppo di ordine $2n$ e H un sottogruppo di G di ordine n. Dimostrare che H è normale in G.

5. Dire quali dei seguenti gruppi sono isomorfi al prodotto diretto di due suoi sottogruppi non banali:

   a) $\mathbb{Z}_6$
   b) $\mathbb{Z}_4$
   c) $\mathbb{Z}_{30}$
   d) D_{14}
   e) Q
   f) D_7
   g) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
   h) A_4

6. Determinare il centro di A_4 e di D_5.

7. Determinare le classi di coniugio dei gruppi $\mathbb{Z}_2 \times S_3$, A_4, D_4 e D_5.

8. Un *automorfismo* di un gruppo G è un isomorfismo di G in sé. Un sottogruppo H di G è detto *caratteristico* se $\phi(H) \subseteq H$ per ogni automorfismo ϕ.
   a) Dimostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale.
   b) Dimostrare che il centro di G è un sottogruppo caratteristico.
   c) Trovare un esempio di un sottogruppo caratteristico H e un omomorfismo $\phi : G \longrightarrow G$ tale che $\phi(H) \nsubseteq H$.

9. Sia G un gruppo e $g \in G$. Dimostrare che la mappa

$$\begin{aligned} \gamma_g \colon G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

è un automorfismo di G.

10. Determinare quali tra le sequenti coppie σ_1, σ_2 sono coniugate in S_n e, in caso positivo, determinare τ tale che $\sigma_1 = \tau\sigma_2\tau^{-1}$:
    a) $\sigma_1 = (123)(45)$, $\sigma_2 = (456)(23)$
    b) $\sigma_1 = (123456)$, $\sigma_2 = (54321)$
    c) $\sigma_1 = (12)(35)(67)$, $\sigma_2 = (34)(21)(75)$
    d) $\sigma_1 = (1274)(356)$, $\sigma_2 = (239)(4657)$
    e) $\sigma_1 = (1298)(35)(46)$, $\sigma_2 = (39)(28)(126)$
    f) $\sigma_1 = (123)(453)(125)$, $\sigma_2 = (32541)$

11. Sia $\mathrm{Aut}(G)$ l'insieme degli automorfismi di G.
    a) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(G)$, con la composizione di funzioni, è un gruppo.
    b) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ è isomorfo al gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_n$.

12. Siano g, h due elementi di G dello stesso ordine tali che $\langle g\rangle \neq \langle h\rangle$. Dimostrare che $gh \notin \langle g\rangle \cup \langle h\rangle$.

13. Sia G un gruppo di ordine 8.
    a) Dimostrare che esiste un elemento di G di ordine 2.
    b) Dimostrare che, se G non è abeliano, esiste un elemento di G di ordine 4.
    c) Dimostrare che il numero di elementi di G di ordine 4 è pari; sia n_4 questo numero.
    d) Dimostrare che, se $n_4 = 6$, allora G è isomorfo al gruppo dei quaternioni.
    e) Dimostrare che, se $n_4 = 4$, allora tutti gli elementi di ordine 4 commutano tra di loro; dedurne che G è abeliano.[1]
    f) Dimostrare che, se $n_4 = 2$, allora $a^2b = ba^2$, dove a ha ordine 4 e b ha ordine 2; dedurne che $G \simeq D_4$.
    g) Mostrare che G è isomorfo a uno tra $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, D_4 e Q.

[1]Suggerimento: usare l'esercizio precedente