Esercitazioni di AL210

A.A. 2017–2018 - Docente: Prof. S. Gabelli
Esercitatore: Dario Spirito

Esercitazione 5
3 novembre 2017

I esonero, 2016-2017

1. Determinare tutti i sottogruppi del gruppo additivo $\mathbb{Z}_{12}$. Mostrare inoltre che esistono due sottogruppi non banali H e K tali che $\mathbb{Z}_{12}$ è isomorfo al prodotto diretto $H \times K$.

2. Sia G il gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_{997}$. Determinare il gruppo degli automorfismi di G.

3. Siano G_1 e G_2 due gruppi di ordini 24 e 30, rispettivamente. Sia G un gruppo non commutativo isomorfo a un quoziente di G_1 e anche a un quoziente di G_2. Provare che G è isomorfo a S_3.

4. Sia $H = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a = b\}$. Provare che H è un sottogruppo additivo di $\mathbb{C}$ e che il gruppo quoziente $\mathbb{C}/H$ è isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.

5. Costruire tutti gli omomorfismi di gruppi $\varphi : A_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$. Per ognuno di essi determinare inoltre il nucleo e l'immagine e definire l'isomorfismo canonico $\overline{\varphi} : \dfrac{A_4}{\ker \varphi} \longrightarrow \mathrm{Im}\varphi$.

6. Sia $n \geq 3$ un numero dispari. Dimostrare che esistono due n-cicli di S_n che non sono coniugati in A_n. Che succede se n è pari?

---

7. Per ognuno dei seguenti gruppi, determinare i sottogruppi normali e il relativo gruppo quoziente: $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_{12}$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, D_4, D_5, A_4 e S_4.

8. Dimostrare che ogni elemento di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ha ordine finito.

9. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ è isomorfo al gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_n$.

10. Determinare tutti gli omomorfismi da $\mathbb{Z}_a$ a $\mathbb{Z}_b$. Quanti sono iniettivi? Quanti suriettivi? Quanti biunivoci?

11. Determinare tutti gli omomorfismi da D_4 in D_4.

12. Sia $\phi : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che, per ogni $h \in H$, $|\phi^{-1}(h)| = |\ker \phi|$.

13. Sia $\phi : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che, per ogni $g \in G$, l'ordine di $\phi(g)$ divide l'ordine di g.

14. Sia ϕ la mappa
$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ x &\longmapsto e^{2\pi i x}\end{aligned}$$

    a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
    b) Dimostrare che $\ker \phi = \mathbb{Z}$.
    c) Dimostrare che l'immagine di ϕ è $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
    d) Dedurne che $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
    e) Dedurne che $\mathbb{C}_\infty \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dove $\mathbb{C}_\infty$ è l'insieme delle radici dell'unità.